数理統計 補助資料
～差の差の分析～

2024年度2学期:　　月曜1限, 水曜3限

担当教員:　　　石垣　司

差の差の分析 (DD: Difference in Differences)

政策や施策などの介入の因果効果を推定する手法

- パネルデータ（複数主体のデータが複数時点で観測されているデータ）を利用した因果効果の推定

  ある一つの変数 y の主体 i $(i=1,\dots,N)$ に対する時点 t $(t=1,\dots,T)$ のパネルデータ

ID	時点 $t=1$	時点 $t=2$	$\cdots$	時点 $t=T$
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1T}
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2T}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	y_{i1}	y_{i2}	$\cdots$	y_{iT}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	y_{N1}	y_{N2}	$\cdots$	y_{NT}

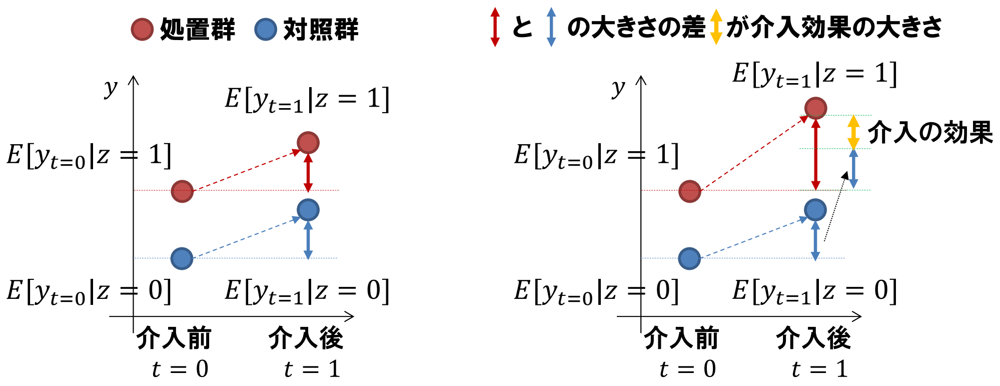
  例: 各国 i の年次毎のGDP, 各支社 i の四半期毎の営業利益など

- “介入前の処置群の結果変数と対照群の結果変数の差”と“介入後の処置群の結果変数と対照群の結果変数の差”の差を介入の因果効果とする

差の差の分析(DD)のイメージ図

“差の差”が介入の因果効果

- $E[y_t|z]$: 処置群/対照群の時点 t での結果変数の期待値



介入の効果なし　　介入の効果あり

差の差の分析の必要性

介入の効果として適切とは言えない主張の事例

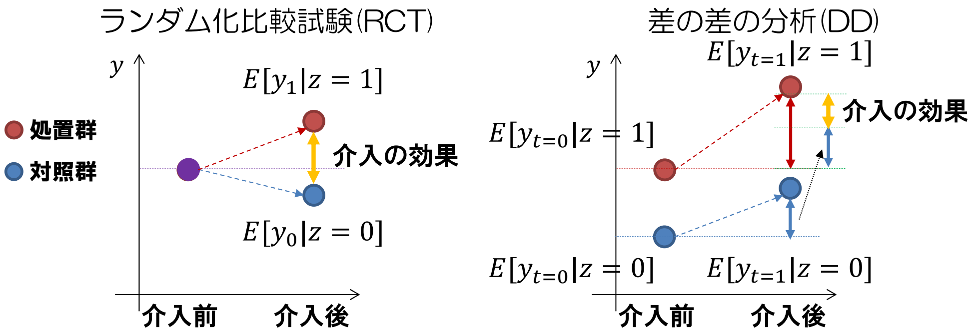
配布版PDFでは削除

- 因果効果と主張するには,「“導入校での2時点での成績の差”と“非導入校の2時点での成績の差”の差」を見る必要がある

「タブレット端末保護者説明会　導入校の成果だけ強調 県教委、資料を修正」佐賀新聞, 2013/12/25
https://www.saga-s.co.jp/articles/-/32921

ランダム化比較試験と差の差の分析の違い

両方法の違いのイメージ図

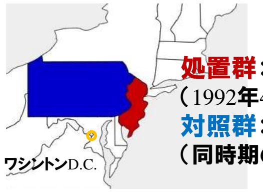


- RCT：処置群/対照群の介入後の1点でデータ観測
  - ランダム化により介入前の両群の期待値を同値にそろえている
- DD：処置群/対照群の介入前と後の2点でデータ観測
  - 介入前の両群の期待値が異なってもよい

経済・経営分野のDD分析の実例

最低賃金と単純労働の雇用の増減(Card & Krueger 1994)

- 当時は最低賃金を上げると単純労働の雇用が減るという経済理論が支配的な考え方
- ニュージャージー州のファストフード店(最低賃金引き上げ前364店&後331店)とペンシルバニア州のファストフード店(同時期109店&79店)のDD分析から，最低賃金を上げることで単純労働者の雇用が増加するという実例を発見した
  - ファストフード店：バーガーキング，ケンタッキー・フライド・チキンなど



処置群：ニュージャージー州（1992年4月最低賃金UP）
対照群：ペンシルバニア州（同時期の最低賃金に変化なし）

#メモ　この分析結果のみからは「最低賃金を上げると雇用が増える」という主張はできないことには注意。Card氏は2021年ノーベル経済学賞(通称)受賞者

Card & Krueger, Minimum Wages and Employment: A Case Study of the Fast-Food Industry in New Jersey and Pennsylvania, American Economic Review, 84(4), 772-93, 1994

DD推定量

DDによる介入効果の定義

$$\begin{aligned}\mathrm{DD} &= (E[y_{t=1}|z=1] - E[y_{t=1}|z=0]) \\ &\quad -(E[y_{t=0}|z=1] - E[y_{t=0}|z=0]) \\ &= E[y_{t=1} - y_{t=0}|z=1] - E[y_{t=1} - y_{t=0}|z=0]\end{aligned}$$

	介入前$(t=0)$	介入後$(t=1)$	差
処置群$(z=1)$	$A = E[y_{t=0}\|z=1]$	$C = E[y_{t=1}\|z=1]$	$C-A$
対照群$(z=0)$	$B = E[y_{t=0}\|z=0]$	$D = E[y_{t=1}\|z=0]$	$D-B$
差	$A-B$	$C-D$	$\boxed{(C-D)-(A-B)}$

- DD推定量

$$\widehat{DD} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N} z_i(y_{i,t=1} - y_{i,t=0}) - \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N}(1-z_i)(y_{i,t=1} - y_{i,t=0})$$

回帰分析を用いたDD

DD推定のための線形回帰モデル

$$y_{it} = b_0 + b_1 z_i + b_2 s_t + b_3 z_i s_t + e_i$$

s_t：介入前時点 $s_t = 0$，介入後時点 $s_t = 1$

- 回帰係数 b_3 が介入効果の大きさ
- 介入効果の有無を統計的検定で検証可能
  - ただし，厳密な外生性（全変数 z, s と e は無相関）という仮定を満たす必要あり

	介入前$(t=0)$	介入後$(t=1)$	差
処置群	$E[y_t\|z=1] = b_0 + b_1$	$E[y_t\|z=1]$ $= b_0 + b_1 + b_2 + b_3$	$b_2 + b_3$
対照群	$E[y_t\|z=0] = b_0$	$E[y_t\|z=0] = b_0 + b_2$	b_2
差	b_1	$b_1 + b_3$	$\boxed{b_3}$

回帰分析のためのデータ

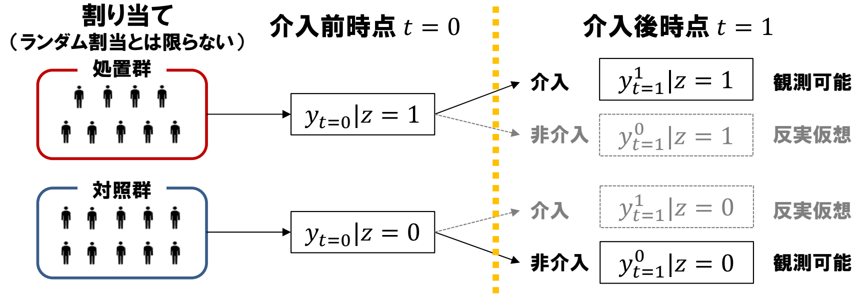
ID	目的変数	割当変数 z	時点変数 s_t
1	y_{10}	z_1	0
⋮	⋮	⋮	⋮
i	y_{i0}	z_i	0
⋮	⋮	⋮	⋮
N	y_{N0}	z_N	0
1	y_{11}	z_1	1
⋮	⋮	⋮	⋮
i	y_{i1}	z_i	1
⋮	⋮	⋮	⋮
N	y_{N1}	z_N	1

DD推定量を因果効果とみなすために必要な仮定

反実仮想に対する仮定が必要となる

（記号の表記法）

- $y_{t=1}^{1}|z=1$: 処置群で介入を受けた主体の介入後の結果変数
- $y_{t=1}^{0}|z=1$: 処置群で介入を受けなかった主体の介入後の結果変数
- $y_{t=1}^{1}|z=0$: 対照群で介入を受けた主体の介入後の結果変数
- $y_{t=1}^{0}|z=0$: 対照群で介入を受けなかった主体の介入後の結果変数



DDに必要な仮定～平行トレンドの仮定 #1

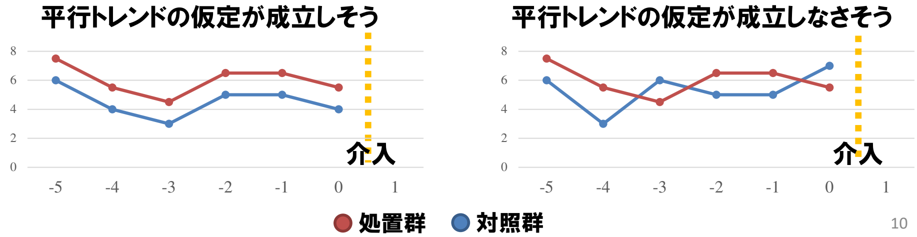
平行トレンドの仮定

- 介入を受けなかったときの結果変数の経時変化が処置群と対照群で等しい

$$E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=1]=E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=0]$$

- チェック方法: 介入以前のデータの可視化

※この仮定は反実仮想に対する仮定のため成立を証明することできない。あくまで,「成立しそう」や「成立することは期待できない」などの程度の検証やチェック



DDに必要な仮定～平行トレンドの仮定 #2

処置群での平均処置効果 (TET: average treatment effect on the treated)

- 本来知りたい因果効果だが, 反実仮想を含むため通常は計算できない

$$TET=E[y_{t=1}^{1}-y_{t=1}^{0}|z=1]$$

DDで測っているのは処置群での平均処置効果

- 平行トレンドの仮定($E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=1]=E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=0]$)を満たすならば,

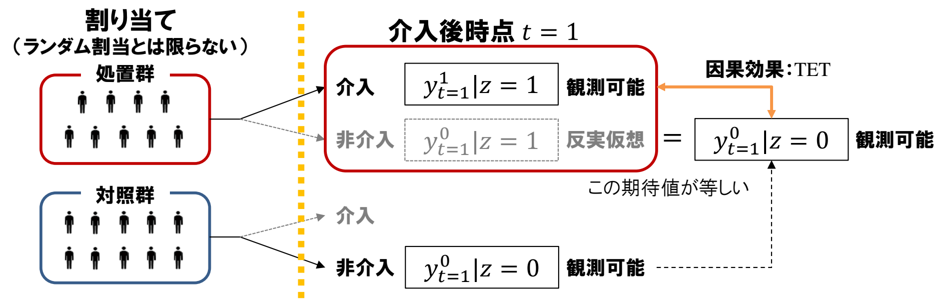
$$\begin{aligned}\mathrm{DD}&=E[y_{t=1}^{1}-y_{t=0}|z=1]-E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=0]\\&=E[y_{t=1}^{1}-y_{t=0}|z=1]-E[y_{t=1}^{0}-y_{t=0}|z=1]\\&=E[y_{t=1}^{1}-y_{t=1}^{0}|z=1]=TET\end{aligned}$$

- 観測データのみから反実仮想を含む因果効果を推定している

ただし, 平行トレンドの仮定を満たすという強い制約の下で

DDに必要な仮定～平行トレンドの仮定 #3

平行トレンドの仮定を満たしている場合



社会科学における平行トレンドの仮定の扱い

- ランダム割当の仮定よりは現実的な仮定

データを2時点で取得しているため緩い仮定でOK

- 例: 介入前後のデータ測定の時間が比較的短いときの成人や市町村の特徴などは平行トレンドの仮定を満たすと主張できる場合もある

DDに必要な仮定～共通ショックの仮定

共通ショックの仮定

- 介入後に結果変数に影響を与える外生的ショック(割当変数とは無相関なイベント)が発生している場合には処置群と対照群に等しく作用している, という仮定
  - 処置群/対照群のどちらかのみにイベントが発生していると, 介入効果と別イベントの効果を区別できない
  - 例: 端末導入校にのみ新しく特進コースが設置された
  - 例: ペンシルバニア州にのみ新しい所得税法が導入された

職業訓練プログラム参加前の収入とプログラム修了後の収入の関係のDD分析を考える。割り当てはランダム化され、共変量も調整されているとする。このとき、修了者のみに1億円ボーナスがある場合(非共通なショック)、1億円を元手に投資や学習などが可能なため、職業訓練プログラムの内容が収入へ与える効果のDD分析は不適切。しかし、処置群での平均処置効果に関する平行トレンドの仮定$E[y^0_{t=1} - y^0_{t=0}|z=1] = E[y^0_{t=1} - y^0_{t=0}|z=0]$は満たされてしまう。そのため、共通ショックの仮定もDD分析のためには必要。処置群での平均処置効果の平行トレンドの仮定と同時に対象群での平均処置効果の平行トレンドの仮定$E[y^1_{t=1} - y^1_{t=0}|z=1] = E[y^1_{t=1} - y^1_{t=0}|z=0]$も満たされる場合は共通ショックの仮定も満たされる。

共変量がある場合のDD

共変量調整したDD推定

$$\mathrm{DD} = E_x[E[y_{t=1} - y_{t=0}|z=1, \boldsymbol{x}] - E[y_{t=1} - y_{t=0}|z=0, \boldsymbol{x}]]$$

共変量がある場合の平行トレンドの仮定

$$E[y^0_{t=1} - y^0_{t=0}|z=1, \boldsymbol{x}] = E[y^0_{t=1} - y^0_{t=0}|z=0, \boldsymbol{x}]$$

- “共変量 x が同じ場合に平行トレンドの仮定が成り立つ”という仮定で十分
  - 実用的には, 強く無視できる割り当て条件や平均での独立性よりは緩い条件

#メモ　学習の道筋:傾向スコアを用いたDDも可能。興味のある学生は下記参照
星野「調査観測データの統計科学」岩波書店 2009
Abadie, Semiparametric Difference-in-Differences Estimators, Review of Economic Studies, 72(1), 1-19, 2005