

数理統計 補助資料

～意思決定のためのベイズ推定～

2024年度2学期： 月曜1限, 水曜3限
担当教員： 石垣 司

1

現実世界での意思決定の特徴

不確実性を伴う(ことがほとんど)

- [社長] 100%成功する投資先だけをリストアップしてくれ
⇒ [部下] 私は全知全能の神ではありません!



限定的な情報(しか得られていないことが多い)

- [社長] 十分な情報が出そろってから投資先を決めたい
⇒ [部下] これ以上の情報が集まる見込みはありません!

デッドラインがある(ことが多い)

- [社長] 十分な情報が出そろってから投資先を決めたい
⇒ [部下] 締切は本日の10時です!

不確実性を伴う状況で、手元にある情報のみを利用して現時点での最良な選択をしたい

2

ベイズ統計学と意思決定

事前分布 $p(\theta)$ から事後分布 $p(\theta|y)$ を計算する過程と人間の意思決定過程の類似性(復習)

頻度主義的統計学との比較の観点

- 「古典統計学では、社会には異なる信念と目的をもった様々な人がいるという理解の下で、何が公的に確立されているのかについて、社会全体が合意するためのツールの集合なのである。ベイズ統計学は、推論したり、意思決定したりするために、その知識や信念、証拠や直観を整理しようと試みている個人のためのツールである」(ギルボア, [訳]川越, 「不確実性下の意思決定理論」, 2014)

なぜベイズ統計学は意思決定する個人のためのツールなのか?

- 事前情報の有効利用(復習)
- 情報(事後分布)の逐次更新(本日の授業のテーマ)

3

沈没した潜水艦の搜索の事例 #1

潜水艦スコーピオン号沈没事件(1968)

- 米海軍原子力潜水艦が大西洋で消息不明
- 爆発音やその他の分析から沈没範囲は、172マス(1マス約1.6km×1.4km)のどこかと推定
ベイズ推定を利用した搜索法が採用された
ベイズ推定のおかげで発見できたかどうかは不明だが、搜索終了後にその手法がBayesian search theoryとして整備された



問題設定

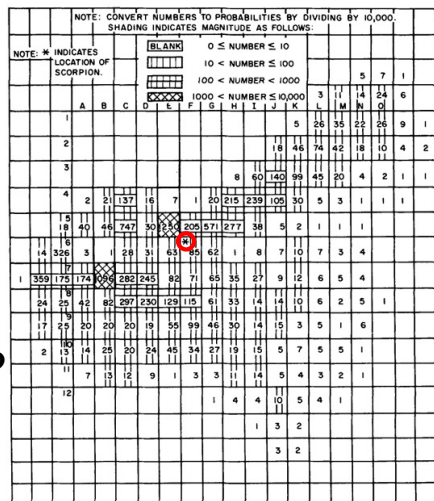
- 172マスの中のどのマスを優先的に搜索すべきか?
発見したら終了。発見できなかったら再度搜索場所の決定
- 条件: 実際に潜水艦が沈没しているマスを搜索したとしても、センサー精度の理由で潜水艦が発見されるとは限らない

4

沈没した潜水艦の搜索の事例 #2

スコープオン号の沈没場所の事前確率

- 複数のシナリオを考慮した乱数シミュレーションにより、潜水艦が沈んでいそうな確率(確信度)を算出
実務上は右図の作成が最重要



搜索結果

- 沈没から5か月後に約3,000mの海底(○部分)に沈んでいるスコープオン号を発見
何度か○部分を搜索していたが発見できずに素通りしていた

Richardson & Stone, Operations analysis during the underwater search for Scorpion, Naval Research Logistics, 18, 141-157, 1971 5
マグレイン, (訳) 富永, 「異端の統計学ベイズ」, 草思社, 2013

搜索マス決定のベイズ推定 #1

搜索の数理モデル化

- $\Pr(z_i)$: マス i ($i = 1, \dots, M$) に潜水艦が存在する確率
 $z_i = 1$: 潜水艦が存在する, $z_i = 0$: 存在しない
 $z_i = 1$ なら $z_j = 0, (i \neq j)$
- $\Pr(y_i)$: マス i に潜水艦が存在するとき, 潜水艦を検知することができる確率
 $y_i = 1$: 潜水艦を検知できた, $y_i = 0$: 検知できなかった
- 実際はカメラ, 磁気センサ, ソナーなどが区別されたが, 本授業では単純化
 $\Pr(y_i = 1 | z_i = 0) = 0$
 $z_i = 1$ なら $y_j = 0, (i \neq j)$
- データ: マス i を搜索して潜水艦を非検知という事象

搜索の戦略

- $\Pr(z_i)$ が最大となるマス i から優先的に搜索

搜索マス決定のベイズ推定 #2

マス i の潜水艦の存在確率のベイズ推定

- マス i を搜索し潜水艦を非検知のとき, マス i に潜水艦が存在する確率
- 事前分布: $\Pr(z_i = 1)$. 尤度関数: $\Pr(y_i = 0 | z_i = 1)$
- 事後分布: $\Pr(z_i = 1 | y_i = 0) = \frac{\Pr(y_i=0|z_i=1) \Pr(z_i=1)}{\Pr(y_i=0)}$
 $= \frac{\Pr(y_i=0|z_i=1) \Pr(z_i=1)}{\Pr(y_i=0|z_i=0)\Pr(z_i=0) + \Pr(y_i=0|z_i=1) \Pr(z_i=1)}$

マス j の潜水艦の存在確率のベイズ推定

- マス i を搜索し潜水艦を非検知のとき, マス j に潜水艦が存在する確率
- 事前分布: $\Pr(z_j = 1)$. 尤度関数: $\Pr(y_i = 0 | z_j = 1)$
- 事後分布: $\Pr(z_j = 1 | y_i = 0) = \frac{\Pr(y_i=0|z_j=1) \Pr(z_j=1)}{\Pr(y_i=0)}$
 $= \frac{\Pr(y_i=0|z_j=1) \Pr(z_j=1)}{\Pr(y_i=0|z_i=0)\Pr(z_i=0) + \Pr(y_i=0|z_i=1) \Pr(z_i=1)}$

搜索マス決定の具体例 #1

	事前分布				潜水艦があれば発見できる確率
マス	A	B	C	D	$\Pr(y_i = 1 z_i = 1)$
$\Pr(z_i)$	0.5	0.3	0.15	0.05	0.8

第1回搜索の意思決定 ⇒ マス A を搜索する

- 第1回搜索で発見できず ⇒ 第2回搜索のマス決め
- マス A の事後確率: $\Pr(z_A = 1 | y_A = 0) = \frac{(1-0.8) \times 0.5}{1 \times (1-0.5) + (1-0.8) \times 0.5} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$
- マス B の事後確率: $\Pr(z_B = 1 | y_A = 0) = \frac{1 \times 0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$
- マス C の事後確率: $\Pr(z_C = 1 | y_A = 0) = \frac{1 \times 0.15}{0.6} = \frac{1}{4}$
- マス D の事後確率: $\Pr(z_D = 1 | y_A = 0) = \frac{1 \times 0.05}{0.6} = \frac{1}{12}$

	事後分布			
マス	A	B	C	D
$\Pr(z_i)$	0.17	0.5	0.25	0.08

⇒ 第2回搜索はマス B を搜索する。

搜索マス決定の具体例 #2

第2回搜索の意思決定 ⇒ マス B を搜索する

- 第2回搜索で発見できず ⇒ 第3回搜索のマス決め
- 第1回搜索後に計算した事後分布を事前分布として採用

事前分布					潜水艦があれば発見できる確率
マス	A	B	C	D	$\Pr(y_i = 1 z_i = 1)$
$\Pr(z_i)$	0.17	0.5	0.25	0.08	0.8

事後分布				
マス	A	B	C	D
$\Pr(z_i)$	0.28	0.17	0.42	0.13

⇒ 第3回搜索はマス C を搜索する

潜水艦が発見されるまでこのプロセスを繰り返す

9

補足: 搜索マス決定の具体例

ちなみに...	事前分布				潜水艦があれば発見できる確率
マス	A	B	C	D	$\Pr(y_i = 1 z_i = 1)$
$\Pr(z_i)$	0.5	0.3	0.15	0.05	0.3

第1回搜索の意思決定 ⇒ マス A を搜索する

- 第1回搜索で発見できず ⇒ 第2回搜索のマス決め

- マス A の事後確率: $\Pr(z_A = 1|y_A = 0) = \frac{(1-0.3) \times 0.5}{1 \times (1-0.5) + (1-0.3) \times 0.5} = \frac{0.35}{0.85} = \frac{7}{17}$
- マス B の事後確率: $\Pr(z_B = 1|y_A = 0) = \frac{1 \times 0.3}{0.85} = \frac{6}{17}$
- マス C の事後確率: $\Pr(z_C = 1|y_A = 0) = \frac{1 \times 0.15}{0.85} = \frac{3}{17}$
- マス D の事後確率: $\Pr(z_D = 1|y_A = 0) = \frac{1 \times 0.05}{0.85} = \frac{1}{17}$

事後分布				
マス	A	B	C	D
$\Pr(z_i)$	0.41	0.35	0.18	0.06

⇒ 第2回搜索でも、もう一度マス A を搜索する

10

ベイズ推定による情報の逐次更新の構造

各ステップのデータ取得時点で、パラメータの情報(事後分布)を最新版に更新

- 前ステップの事後分布を次のステップの事前分布として利用

$$[\text{Step 1}]: p(\theta^{(0)})p(y^{(1)}|\theta^{(0)}) \propto p(\theta^{(1)}|y^{(1)})$$

$$[\text{Step 2}]: p(\theta^{(1)})p(y^{(2)}|\theta^{(1)}) \propto p(\theta^{(2)}|y^{(2)})$$

$$[\text{Step 3}]: p(\theta^{(2)})p(y^{(3)}|\theta^{(2)}) \propto p(\theta^{(3)}|y^{(3)})$$

⋮

⋮

- Bayesian search theory では、不確実性を伴う状況で、手元にある情報のみを利用して現時点での最良な選択をしている

11

逐次ベイズ推定(ベイズ更新)

過去のデータから構成された情報を、現在のデータに基づいた情報へ更新するための枠組

- (前頁の構造を一般化した書き方)

事前分布: $t = 1, \dots, T-1$ までのデータで構成される θ の情報

尤度関数: $\theta^{(T-1)}$ によるデータ $y^{(T)}$ の尤度関数

事後分布: $t = 1, \dots, T$ までのデータで構成される θ の情報

$$[\text{Step } T]: p(\theta^{(T-1)}|\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(T-1)}\})p(y^{(T)}|\theta^{(T-1)}) \propto p(\theta^{(T)}|\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(T)}\})$$

例: 潜水艦の搜索マスの意思決定(3回目の搜索終了時)

$$p(\theta^{(2)}|\{y_A = 0, y_B = 0\})p(y_C = 0|\theta^{(2)}) \propto p(\theta^{(3)}|\{y_A = 0, y_B = 0, y_C = 0\})$$

#メモ この先の学習の道筋。状態変化のマルコフ性、モデルの線形性、誤差項の正規性などを仮定すると、カルマンフィルタと呼ばれる洗練されたアルゴリズムが導出できる。

12

演習問題

既存の自社製品の毎月の受注数(y)は鉄工業生産指数(x)に

$$y = bx + e, e \sim N(0, 100)$$

として比例することが経験的に分かっている。ここで、市場に投入したばかりの新製品の受注数の予測を行いたい

1. 発売1か月目のデータとして $y_1 = 120, x_1 = 100$ が得られた。パラメータ b の事前分布を $N(b_0; 1, 0.01)$ としたとき、今月のデータによって更新された事後分布 $p(b_1 | y_1, x_1)$ を求めよ
2. 発売2か月目のデータとして $y_2 = 80, x_2 = 100$ が得られた。 $p(b_1 | y_1, x_1)$ を事前分布として、事後分布 $p(b_2 | y_2, x_2)$ を求めよ

ヒント: 線形回帰モデルで分散 σ^2 , 切片 a が既知, 傾き b の事前分布を $N(b_0; m, v^2)$ としたときの傾き b の事後分布は次であった

$$p(b|D) = N\left(b; \frac{(y - a)^T x v^2 + m \sigma^2}{x^T x v^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 v^2}{x^T x v^2 + \sigma^2}\right)$$