

# マーケティング・リサーチ特論 ～離散選択モデル～

2024年度1学期： 水曜3限  
担当教員： 石垣 司

1

## 離散選択モデル

### 人間の選択行動の意思決定の数理モデル

- 計量経済学で発展 (D. McFadden, J. Heckman 2000年ノーベル経済学賞)

### マーケティング・リサーチでは？

- 購買や来店の有無などの行動や選択データを用いた意思決定メカニズムのモデル化
- ブランド選択モデル, カテゴリ選択モデル, 店舗選択モデルなど



### 【抽出できる情報の例】

ブランドA・B・Cが200円の時のブランドAの選択確率60% (ブランドB:25%,ブランドC:15%)  
ブランドAが200円でブランドB・Cが180円の時のブランドAの選択確率30% <sup>2</sup>

## 効用最大化原理と合理的選択

### 効用最大化原理

- 選択の意思決定において、選択可能な選択肢(ブランドや商品)の中から自らの効用が最大となる選択肢を選ぶ

### 効用最大化原理のもとでの合理的選択行動

- 選択肢の集合  $S$   
 $S$  は個人や時間に依存する場合もある
- 2項選択モデル: 選択肢  $j$  と  $k$  の効用  $U_j, U_k$   
例:  $S = \{j, k\}, U_j > U_k \Rightarrow$  選択肢  $j$  を選択
- 多項選択モデル: 選択肢  $l$  の効用  $U_l$   
例:  $S = \{j, k, l\}, \max\{U_j, U_k, U_l\} = U_k \Rightarrow$  選択肢  $k$  を選択



3

## 離散選択モデルの問題設定

選択肢集合  $S$  の要素は離散値で、その要素から一つの選択肢を選択する

### 選択肢は排他的

- $S = \{Aのみ, Bのみ, AとB両方\}$  はOK
- $S = \{Aのみ, Bのみ, AとBのどちらか一つ\}$  はダメ

### 選択肢の数は有限かつ網羅的

- 選択肢集合  $S$  の要素以外の選択肢は考えない
- “選択しない”という選択肢も  $S$  に含まれる

(多くの場合、)

マーケティング・リサーチでは確率的な効用を考える

4

# 確率的効用モデル

## 効用 = 確定項 + 確率項

- 効用:  $U_{itj} = V_{itj} + e_{itj}$

$U_{itj}$ : 消費者  $i$  が時刻  $t$  で商品  $j$  を選択するときの効用

- 選択肢  $j = \{1, \dots, J\}$ , 消費者  $i = \{1, \dots, I\}$ , 時刻  $t = \{1, \dots, T\}$

**確定項**: マーケティング活動によって説明可能な部分

**確率項**: 心理的な揺れなど、確定的部分では説明できない部分

## 選択肢 $j$ の選択確率

$Y_{it}$ : 消費者  $i$  が時刻  $t$  で選択した商品 ( $Y_{it} \in \{1, \dots, J\}$ )

$$\Pr(Y_{it} = j) = \Pr(U_{itj} \geq U_{itl} | \forall l \in S)$$

$$= \Pr(V_{itj} - V_{itl} \geq e_{itl} - e_{itj} | \forall l \in S)$$

確定項の相対効用(2つの商品の効用の差)で  
選択肢  $j$  の選択確率を表現できる

# 効用の確定項のモデル化

## 線形回帰モデルによる効用の確定項の表現

$$V_{itj} = b_{j0} + b_1 x_{itj1} + \dots + b_P x_{itjP}$$

(ブランド選択モデルの中での呼称)

- マーケティング変数ベクトル:  $x_{itj} = [x_{itj1}, \dots, x_{itjP}]^T$

例: 価格 ( $x_{itjp} \in \mathbb{R}^+$ )

例: ダイレクトメール送付 ( $x_{itjp} \in \{0,1\}$ ), など

- 反応係数ベクトル:  $b_j = [b_{j0}, b_1, \dots, b_P]^T$

- ブランド価値:  $b_{j0}$

マーケティング変数に依存しないブランド  $j$  の基礎的な被購買力

# 多項ロジットモデル #1

## 選択確率を確定項の指数関数の比率で表現



効用の確定項  $V_{itA}$   $V_{itB}$   $V_{itC}$

## - ブランドAの選択確率

$$\Pr(Y_{it} = A) = \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB}) + \exp(V_{itC})}$$

$$= \frac{\exp(V_{itA})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{itj})}$$

# 多項ロジットモデル #2

## 多項ロジットモデルの特徴

- 確定項のみの簡潔なモデル

- 誤差項  $e_{itj}$  はガンベル分布(極値分布)

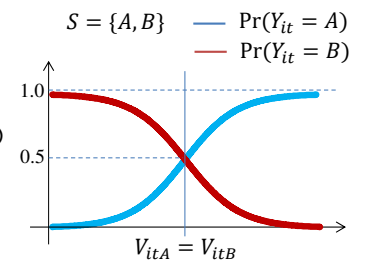
- 最尤推定しやすい

尤度関数はパラメータの陽関数

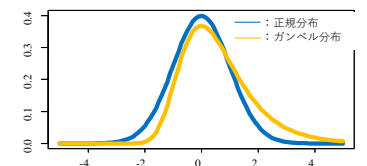
$$L(\theta) = \prod_i \prod_t \prod_j \left[ \frac{\exp(V_{itj})}{\sum_{l=1}^J \exp(V_{itl})} \right]^{y_{itj}}$$

データ  $y_{itj}$ :  $\begin{cases} \text{消費者 } i \text{ が時刻 } t \text{ で商品 } j \text{ を選択したら } y_{itj} = 1 \\ \text{それ以外は } y_{itj} = 0 \end{cases}$

- IIA特性がある



2項ロジットモデルの選択確率



#メモ: 左右非対称なガンベル分布を用いる理由。多項ロジットモデル(確定項の指数関数の比率)で選択確率を表現するためには、誤差項にガンベル分布を仮定すると数学的なつじつまが合う、という後付けのロジック。本質的な意味はない

# Rでの分析例～多項ロジットモデル #1

## “mlogit”パッケージ

– 多項ロジット, Nested ロジットモデルなどの豊富な関数群

## ケチャップの購買履歴データの分析

Jain DC, Vilcassim NJ, Chintagunta PK (1994). “A Random-Coefficients Logit Brand-Choice Model Applied to Panel Data.” Journal of Business & Economic Statistics, 12(3), 317-328.

– ブランド: Heinz 28, Heinz 32, Heinz 41, Hunt’s 32

Heinz 28, 32 & 41 は同じブランドでサイズのみが異なる

米国ミズーリ州スプリングフィールドの300世帯で2年間に観測された  
2,798 ケチャップの購買履歴(スキャンパネルデータ)

– 説明変数:

価格(prices of all brands in the product category)

ディスプレイ(special displays of brands in the store)

チラシ(newspaper feature advertisements)



Heinz: <https://www.heinz.com/products?condimentType%5B0%5D=ketchup>  
Hunt's: <https://www.hunts.com/ketchup>

#メモ: 消費者の主な購入理由はどっち? ブランド? それとも重量?

9

# IIA特性と赤バス青バス問題 #1

## 例: 多項ロジットモデルによる移動手段選択

飛行機移動の効用:  $\exp(V_{itA}) = 1$ , バス移動の効用:  $\exp(V_{itB}) = 1$

飛行機の選択確率

$$\Pr(Y_{it} = A) = \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB})} = \frac{1}{2}$$



バスの選択確率

$$\Pr(Y_{it} = B) = \frac{\exp(V_{itB})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB})} = \frac{1}{2}$$



– 色だけが異なる同じ機能のバスを選択肢に追加

赤バス移動の効用:  $\exp(V_{itB}) = 1$ , 青バス移動の効用:  $\exp(V_{itC}) = 1$



$$\begin{aligned} \text{飛行機の選択確率: } \Pr(Y_{it} = A) &= \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB}) + \exp(V_{itC})} = \frac{1}{3} \\ \text{赤バスの選択確率: } \Pr(Y_{it} = B) &= \frac{\exp(V_{itB})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB}) + \exp(V_{itC})} = \frac{1}{3} \\ \text{青バスの選択確率: } \Pr(Y_{it} = C) &= \frac{\exp(V_{itC})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB}) + \exp(V_{itC})} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

11

# Rでの分析例～多項ロジットモデル #2

## 多項ロジットモデルによる推定

データの  
記述統計量

	Heinz 41	Heinz 32	Heinz 28	Hunt's 32
Display	.032	.099	.076	.045
Feature	.033	.065	.069	.046
Price(\$/oz)	.046	.031	.043	.034
Brand Share	6.5 %	52.1 %	30.4 %	11.0 %

## – 推定結果

```
library("mlogit")
data("Catsup", package = "mlogit")
Data = mlogit.data(Catsup, varying=c(2:13),
  sep=".", shape="wide", choice="choice")
Mlogit =
  mlogit(choice=disp+feat+price||0,data=data,refl
  eve="heinz32")
Coefficients :
  Estimate Std. Error z-value Pr(>|z|)
(Intercept):heinz28  0.924723  0.077218  11.9755 < 2.2e-16 ***
(Intercept):heinz41 -0.147549  0.107970  -1.3666  0.1718
(Intercept):hunts32 -1.501251  0.068509 -21.9133 < 2.2e-16 ***
disp                0.875593  0.097014  9.0254 < 2.2e-16 ***
feat                0.908559  0.114030  7.9677 1.554e-15 ***
price              -1.402405  0.057991 -24.1832 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Heinz 32 のブランド価値(切片)を 0 に固定した推定結果

切片は説明変数をゼロに固定したときの, Heinz 32 と比べた購買傾向

Display, Feature は正, Price は負に有意な効果あり

係数の推定値を用いて説明変数の変化と選択確率の関係をシミュレートできる

# IIA特性と赤バス青バス問題 #2

## 無関係な選択肢からの独立性(IIA: Independence from Irrelevant Alternatives)

– 意思決定に無関係な選択肢(青バス)が増えても, 元の選択肢(赤バス)と飛行機の選択確率の比は変化しない

$$\text{IIA特性} \quad \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itB})} = 1, \quad \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itB})} = \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itC})} = 1$$

つまり, 青バスの追加で全選択肢中の飛行機の選択確率が下がる  
赤バスも青バスもバス。上の現象は, 意思決定のモデル化として不自然  
飛行機, バス1, ..., バス1000を考えると飛行機の選択確率はほぼゼロ

– マーケティング・リサーチでの例



# IIA特性は経済学的に合理的な行動を説明するための公理。合理的な嗜好の説明には望ましい性質だが、選択モデルの選択確率に対しては不都合な性質

12

# 多変量正規分布

## 正規分布を高次元化した確率分布 $N_M(\mu, \Sigma)$

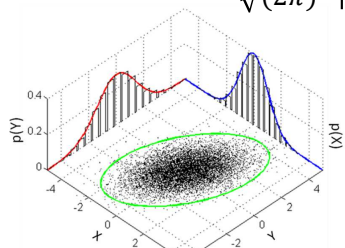
$$y \sim N_M(\mu, \Sigma)$$

$y$ :  $M$  次元確率変数ベクトル,  $\mu$ :  $M$  次元の平均ベクトル

$\Sigma$ :  $M \times M$  次元の分散共分散行列

### 確率密度関数

$$f(y; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - \mu)^T \Sigma^{-1}(y - \mu)\right\}$$



Wikipedia 多変量正規分布

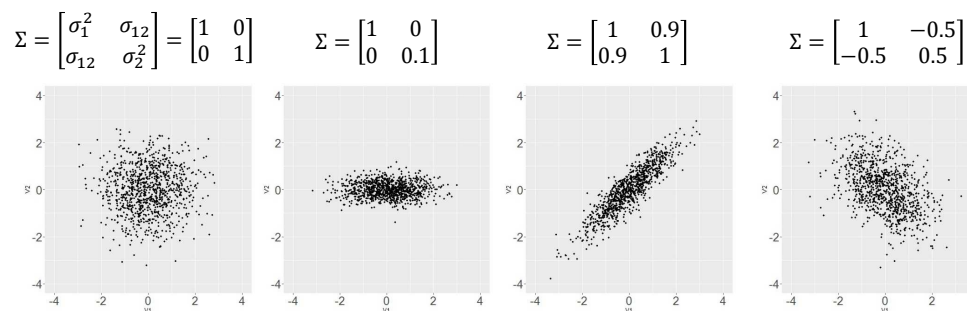
例:  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N_{P=2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3/5 \\ 3/5 & 2 \end{bmatrix}\right)$

# 多変量正規分布と分散共分散行列

## 多変量正規分布の分散共分散行列 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1M} & \cdots & \sigma_M^2 \end{bmatrix}$

$\sigma_i^2$ : 変数  $i$  の分散,  $\sigma_{ij}$ : 変数  $i$  と  $j$  の共分散

平均ベクトル  $\mu = [0 \ 0]^T$  でそれぞれの分散共分散行列  $\Sigma$  の多変量正規分布から、それぞれ1000個の乱数を発生



# 多項プロビットモデル #1

## 効用の誤差項に多変量正規分布を仮定した選択モデル

### 商品数が3 ( $S \in \{A, B, C\}$ ) の多項プロビットモデル

(以降,  $S \in \{A, B, C\}$  のケースを主に紹介)

$$\begin{cases} U_{itA} = V_{itA} + e_{itA} \\ U_{itB} = V_{itB} + e_{itB} \\ U_{itC} = V_{itC} + e_{itC} \end{cases}, \begin{bmatrix} e_{itA} \\ e_{itB} \\ e_{itC} \end{bmatrix} \sim N_3\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{bmatrix}\right)$$

※上式と同じ意味の表現  $\begin{bmatrix} U_{itA} \\ U_{itB} \\ U_{itC} \end{bmatrix} \sim N_3\left(\begin{bmatrix} V_{itA} \\ V_{itB} \\ V_{itC} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{AC} & \sigma_{BC} & \sigma_C^2 \end{bmatrix}\right)$

### 誤差項に正規分布を仮定した自然なモデル

### IIA特性を持たない離散選択モデル

相対効用の相関構造を分散共分散行列で表現

### 選択確率の計算に $J - 1$ 次元の多重積分が必要

$J$  が大のとき、計算量が膨大に (GHK-simulator など計算に工夫が必要)

# 多項プロビットモデル #2

## 相対効用による表現

### 商品 $A, B$ と商品 $C$ の相対効用 (これ以降は最後の選択肢 $C$ との相対効用を考える)

$$u_{itA} = U_{itA} - U_{itC} = V_{itA} - V_{itC} + e_{itA} - e_{itC} = v_{itA} + e_{itA} - e_{itC}$$

$$u_{itB} = U_{itB} - U_{itC} = V_{itB} - V_{itC} + e_{itB} - e_{itC} = v_{itB} + e_{itB} - e_{itC}$$

### 相対効用ベクトルによる表現

$$\begin{bmatrix} u_{itA} \\ u_{itB} \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} v_{itA} \\ v_{itB} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_A^2 - 2\sigma_{AC} + \sigma_C^2 & \sigma_{AB} - \sigma_{AC} - \sigma_{BC} + \sigma_C^2 \\ \sigma_{AB} - \sigma_{AC} - \sigma_{BC} + \sigma_C^2 & \sigma_B^2 - 2\sigma_{BC} + \sigma_C^2 \end{bmatrix}\right)$$

$\cdot V[u_{itA}] = E[(u_{itA} - E[u_{itA}])^2] = E[(e_{itA} - e_{itC})^2] = E[e_{itA}^2] - 2E[e_{itA}e_{itC}] + E[e_{itC}^2] = \sigma_A^2 - 2\sigma_{AC} + \sigma_C^2$

$\cdot \text{Cov}[u_{itA}, u_{itB}] = E[(u_{itA} - E[u_{itA}])(u_{itB} - E[u_{itB}])] = E[e_{itA}e_{itB}] - E[e_{itA}e_{itC}] - E[e_{itC}e_{itB}] + E[e_{itC}^2] = \sigma_{AB} - \sigma_{AC} - \sigma_{BC} + \sigma_C^2$

### 相対効用と商品選択の関係

$u_{itA} > u_{itB}, 0$  のとき商品  $A$  が選択される

$u_{itB} > u_{itA}, 0$  のとき商品  $B$  が選択される

$u_{itA}, u_{itB} < 0$  のとき商品  $C$  が選択される

#メモ: モデルの識別性を確保するために相対効用を考える

# 多項プロビットモデル #3

## 多項プロビットモデルによる商品 j の選択確率

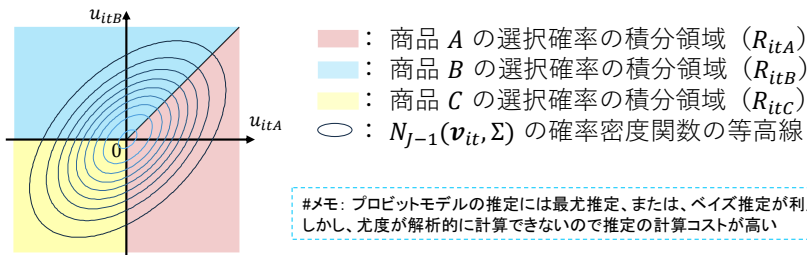
$$\Pr(Y_{it} = j) = \int_{R_{itj}} N_{j-1}(\mathbf{v}_{it}, \Sigma) d\mathbf{u}_{it}$$

相対効用ベクトル:  $\mathbf{u}_{it} = [u_{it1} \ \dots \ u_{it(J-1)}]^T$

相対効用の確定項ベクトル:  $\mathbf{v}_{it} = [v_{it1} \ \dots \ v_{it(J-1)}]^T$

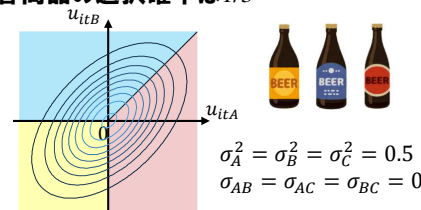
相対効用の分散共分散行列:  $\Sigma$

積分領域  $R_{itj}$  (選択肢 j の相対効用が他の相対効用よりも大きくなる領域)

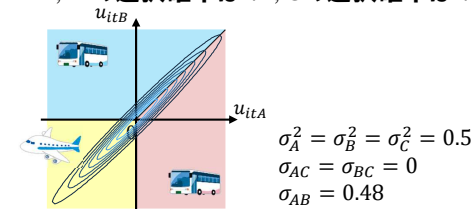


# 多項プロビットモデルによる選択確率の例

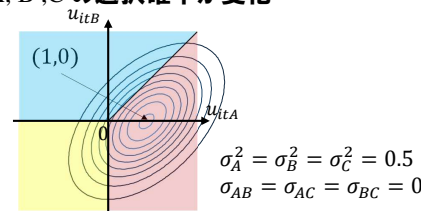
例1:  $V_{itA} = V_{itB} = V_{itC} = 1$ .  
商品 A, B, C の誤差項はそれぞれ独立  
各商品の選択確率は1/3



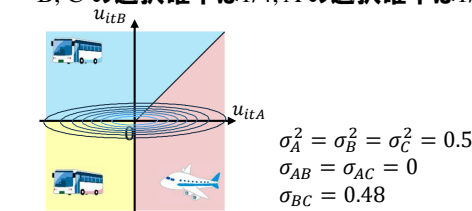
例3:  $V_{itA} = V_{itB} = V_{itC} = 1$ .  
A, B がバスで, C が飛行機  
A, B の選択確率は1/4, Cの選択確率は1/2



例2:  $V_{itA} = 2, V_{itB} = V_{itC} = 1$ .  
商品 A, B, C の誤差項はそれぞれ独立  
A, B, C の選択確率が変化



例4:  $V_{itA} = V_{itB} = V_{itC} = 1$ .  
B, C がバスで, A が飛行機  
B, C の選択確率は1/4, A の選択確率は1/2



## 補足: 多項ロジット&プロビットモデルの識別

### 多項ロジットモデルの識別性のための制約条件

– 一つの商品の切片項を固定( $b_{C0} = 0$ と固定)

$$\begin{cases} U_{itA} = b_{A0} + b_1 x_{itA1} + \dots + b_P x_{itAP} + e_{itA} \\ U_{itB} = b_{B0} + b_1 x_{itB1} + \dots + b_P x_{itBP} + e_{itB} \\ U_{itC} = b_1 x_{itC1} + \dots + b_P x_{itCP} + e_{itC} \end{cases}$$

### 多項プロビットモデルの識別性のための制約条件

– 相対効用ベクトルの分散共分散行列の1行1列を固定

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 - 2\sigma_{AC} + \sigma_C^2 & \sigma_{AB} - \sigma_{AC} - \sigma_{BC} + \sigma_C^2 \\ \sigma_{AB} - \sigma_{AC} - \sigma_{BC} + \sigma_C^2 & \sigma_B^2 - 2\sigma_{BC} + \sigma_C^2 \end{bmatrix}$$

より, 制約条件は,

$$\sigma_A^2 - 2\sigma_{AC} + \sigma_C^2 = 1$$

## Rでの分析例~多項プロビットモデル

### 多項プロビットモデルによる推定結果

– Heinz 32 との相対効用

```

Coefficients:
(Intercept):heinz28  0.337697  0.055182  -6.1197  9.377e-10 ***
(Intercept):heinz41 -0.296262  0.151030  -1.9616  0.04981 *
(Intercept):hunts32 -0.583533  0.063209  -9.2318 < 2.2e-16 ***
disp                0.390942  0.047522  8.2266  2.220e-16 ***
feat                0.437046  0.053943  8.1020  4.441e-16 ***
price              -0.695335  0.040072 -17.3523 < 2.2e-16 ***
    
```

Mprobit =  
mlogit(choice~disp+feat+price|10,data=data,  
probit = TRUE,refleve="heinz32")  
summary(Mprobit)

推定された相対効用の  
分散共分散行列

Heinz 28, Heinz 41, Hunt's 32

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.04 & 0.92 & \\ 0.16 & 0.12 & 0.40 \end{bmatrix}$$

係数の推定結果(ブランド価値, Display, Feature, Price)は多項ロジットモデルと同じ傾向

Heinz 32 & Hunt's 32 の相対効用の分散が他と比べ小さい ⇒ 似た被購買傾向がある可能性 ⇒ このデータは効用間の相関を考慮した分析が必要

プロビットモデルでは共分散関係を考慮した選択確率のシミュレートできる

# Nested ロジットモデル #1

## 両モデル(ロジット&プロビットモデル)は性質が一長一短

	選択肢間の相関構造	計算量
多項ロジット	各選択肢は独立	比較的手軽
多項プロビット	$\Sigma$ で明示的に考慮	$J$ に比例して膨大に

## Nested(入れ子型)ロジットモデル

# Rの分析例の計算時間  
ロジットモデル: 0.16 [s]  
プロビットモデル: 126.86 [s]  
使用CPU: AMD Ryzen Threadripper  
PRO 3995WX 64-Cores 2.70 GHz

### - IIA特性を緩和するロジットモデル

M. Ben-Akiva, Structure of Passenger Travel Demand Models, Ph.D. Dissertation, MIT (1973)  
D. McFadden, "Spatial interaction theory and planning models." In A Karlqvist (ed.), Modeling the choice of residential location, pp. 75-96. (1978).

### - 選択の意思決定の階層性をモデル化

【第1階層  $S \in \{A, B\}$ 】

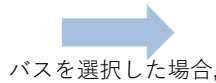


A B  
飛行機 or バス?

【第2階層  $S \in \{B_1, B_2\}$ 】



B1 B2  
赤色 or 青色?



21

# Nested ロジットモデル #2

## 例: 飛行機, 赤バス, 青バスのNested ロジットモデル

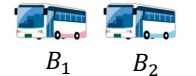
第1階層での選択肢:  $S_1 \in \{A, B\}$

- 選択肢 A の効用:  $U_{itA} = V_{itA} + \lambda_A f(-) + e_{itA}$
- 選択肢 B の効用:  $U_{itB} = V_{itB} + \lambda_B f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2}) + e_{itB}$



第2階層での選択肢:  $S_2 \in \{B_1, B_2\}$

- 選択肢 B1 の効用:  $\tilde{U}_{itB_1} = \tilde{V}_{itB_1} + \tilde{e}_{itB_1}$
- 選択肢 B2 の効用:  $\tilde{U}_{itB_2} = \tilde{V}_{itB_2} + \tilde{e}_{itB_2}$



$$- f(\cdot) = \ln \sum_{k \in S_2} \exp(\tilde{V}_{itk})$$

-  $\lambda_A, \lambda_B$  はデータから推定するパラメータ

#メモ: ここでは飛行機の選択肢にはネスト構造がないので  $f(-) = 0$ 。ただし、赤飛行機・青飛行機がある場合には  $f(\tilde{V}_{itA_1}, \tilde{V}_{itA_2})$  などの関数となる

22

# Nested ロジットモデル #3

## 例: 飛行機, 赤バス, 青バスの Nested ロジットモデル

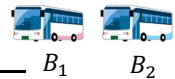
第1階層の選択確率

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = j) = \frac{\exp\{V_{itj} + \lambda_j f(\cdot)\}}{\sum_{j \in \{A, B\}} \exp\{V_{itj} + \lambda_j f(\cdot)\}}$$



第2階層の選択確率

$$\Pr(Y_{it}^{(2)} = k | Y_{it}^{(1)} = B) = \frac{\exp(\tilde{V}_{itk})}{\sum_{k \in \{B_1, B_2\}} \exp(\tilde{V}_{itk})}$$



- 同時確率で選択確率を評価

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = j, Y_{it}^{(2)} = k) = \Pr(Y_{it}^{(2)} = k | Y_{it}^{(1)} = j) \Pr(Y_{it}^{(1)} = j)$$

23

# Nested ロジットモデル #4

## 例: 飛行機, 赤バス, 青バスの Nested ロジットモデル

- 飛行機(A)の選択確率

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = A) = \frac{\exp(V_{itA})}{\sum_{j \in \{A, B\}} \exp\{V_{itj} + \lambda_j f(\cdot)\}}$$

$$\therefore \Pr(Y_{it}^{(1)} = A) = \sum_{k \in \{B_1, B_2\}} \Pr(Y_{it}^{(1)} = A, Y_{it}^{(2)} = k)$$

- 赤バス(B1)の選択確率

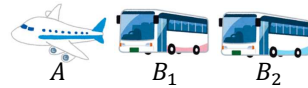
$$\begin{aligned} \Pr(Y_{it}^{(1)} = B, Y_{it}^{(2)} = B_1) &= \Pr(Y_{it}^{(2)} = B_1 | Y_{it}^{(1)} = B) \Pr(Y_{it}^{(1)} = B) \\ &= \frac{\exp(\tilde{V}_{itB_1})}{\sum_{k \in \{B_1, B_2\}} \exp(\tilde{V}_{itk})} \times \frac{\exp\{V_{itB} + \lambda_B f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2})\}}{\sum_{j \in \{A, B\}} \exp\{V_{itj} + \lambda_j f(\cdot)\}} \end{aligned}$$

24

# Nested ロジットモデル #5

## パラメータ $\lambda_B$ が選択肢間の相関構造を規定

- 適切なネスト構造の場合,  $0 \leq \lambda_B \leq 1$
- $\lambda_B \approx 1$  は選択肢間に相関なし.  $\lambda_B < 1$  は相関あり
- データから  $\lambda_B = 1$  を帰無仮説とする検定が可能
- 例: 赤バス青バス問題(選択肢間に強い相関あり  $\lambda_B = 0$ )



$V_{itA} = V_{itB}, \tilde{V}_{itB_1} = \tilde{V}_{itB_2}$  を考えると,

$$\text{飛行機}の選択確率: \Pr(Y_{it}^{(1)} = A) = \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB})} = \frac{1}{2}$$

赤バスの選択確率:

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = B, Y_{it}^{(2)} = B_1) = \frac{\exp(\tilde{V}_{itB_1})}{\exp(\tilde{V}_{itB_1}) + \exp(\tilde{V}_{itB_2})} \times \frac{\exp(V_{itB})}{\exp(V_{itA}) + \exp(V_{itB})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

IIA特性を持たない選択確率の評価ができています

## Rでの分析例～Nestedロジットモデル #1

例: “Heinz” で Nest 構造

例: “32 oz” で Nest 構造

Heinz 28, Heinz 32, Heinz 41 | Hunt's 32

Heinz 32, Hunt's 32 | Heinz 28, Heinz 41

```
Mnested1 = mlogit(choice~disp+feat+price|1,0,data=data, nests=list(Heinz=c("heinz28","heinz32","heinz41"),other="hunts32"),un.nest.el = TRUE,refleve="heinz32")
Mnested2 = mlogit(choice~disp+feat+price|1,0,data=data, nests=list(H32=c("heinz32","hunts32"),other1="heinz41",other2="heinz28"),un.nest.el = TRUE,refleve="heinz32")
```

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	z-value	Pr(> z )
(Intercept):heinz28	1.274924	0.118325	10.7748	< 2.2e-16 ***
(Intercept):heinz41	-0.481310	0.197385	-2.4384	0.01475 *
(Intercept):hunts32	-1.321874	0.090849	-14.5502	< 2.2e-16 ***
disp	1.006850	0.125774	8.0052	1.110e-15 ***
feat	1.256601	0.158067	7.9498	1.776e-15 ***
price	-2.061667	0.122307	-16.8566	< 2.2e-16 ***
iv	1.612843	0.115279	13.9908	< 2.2e-16 ***

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	z-value	Pr(> z )
(Intercept):heinz28	0.692000	0.081491	8.4917	< 2.2e-16 ***
(Intercept):heinz41	-0.416171	0.114752	-3.6267	0.0002871 ***
(Intercept):hunts32	-0.963623	0.072901	-13.2182	< 2.2e-16 ***
disp	0.659994	0.082394	8.0102	1.11e-15 ***
feat	0.809172	0.096351	8.3981	< 2.2e-16 ***
price	-1.246522	0.063531	-19.6208	< 2.2e-16 ***
iv	0.569580	0.041913	13.5897	< 2.2e-16 ***

“iv”: 推定された  $\hat{\lambda}_B = 1.61 > 1$

“iv”: 推定された  $\hat{\lambda}_B = 0.57$

適切なネスト構造とは言えない

- 重量(32oz)によるネストは  $\lambda_B$  の推定値が有意に 1.0 以下
- プロビットモデルと同様に, Heinz 32 と Hunt's 32 の効用に相関関係があることが分かる
- ロジットモデルよりも Nested ロジットモデルを利用すべきデータ

# Nested ロジットモデル #6

## パラメータ $\lambda_B$ が選択肢間の相関構造を規定

- 例: 選択肢間に相関なし( $\lambda_B = 1$ )の選択モデル

このようなケースはネストする意味がない可能性が高い



$V_{itA} = \tilde{V}_{itB_1} = \tilde{V}_{itB_2}, V_{itB} = 0$  を考えると,

ブランドAの選択確率:

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = A) = \frac{\exp(V_{itA} + \lambda_B f(-))}{\exp(V_{itA} + \lambda_B f(-)) + \exp\{V_{itB} + \lambda_B f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2})\}} = \frac{\exp(V_{itA})}{\exp(V_{itA}) + \exp\{\tilde{V}_{itB_1} + \ln(2)\}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

ブランドB<sub>1</sub>の選択確率:

$$\Pr(Y_{it}^{(1)} = B, Y_{it}^{(2)} = B_1) = \frac{\exp(\tilde{V}_{itB_1})}{\exp(\tilde{V}_{itB_1}) + \exp(\tilde{V}_{itB_2})} \times \frac{\exp\{V_{itB} + \lambda_B f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2})\}}{\exp(V_{itA}) + \exp\{V_{itB} + \lambda_B f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2})\}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1+2} = \frac{1}{3}$$

#メモ: ここでの  $V_{itB} = 0$  の設定は、効用の確定項が  $f(\tilde{V}_{itB_1}, \tilde{V}_{itB_2})$  のみで決まることを意味している。 $V_{itA} = \tilde{V}_{itB_1} = \tilde{V}_{itB_2}$  のときには自然な条件

## Rでの分析例～Nestedロジットモデル #2

### ロジット, プロビット, Nested ロジットモデルの比較

	ロジットモデル	プロビットモデル	Nested ロジット (Heinzでネスト)	Nested ロジット (32ozでネスト)
尤度	-2517.9	-2491.6	-2499.5	-2491.8
AIC	5048	5007	5013	4998
計算時間	0.16 [s]	126.86 [s]	0.44 [s]	0.42 [s]

### 消費者行動に関する知見

- モデルの良さ: “ブランドでのネスト” < “重量(32oz)でネスト”
- 消費者は、購入する重量を先に決め、その後にブランドを選択している構造がデータから読み取れる

### 全体的な性質

- プロビットモデル or 適切なNestedロジットモデルが良いモデル
- プロビットモデルの計算量は選択肢数 4 でロジットモデルの 300 倍以上
- プロビットモデルは選択肢数に比例して計算時間は指数的に増加
- 適切な Nested ロジットモデルは性能・計算量の面でバランスよし

# 補足: Rの mlogit 関数のクセ

---

## “|” の意味

- 説明変数のインデックスに応じて | を書く
- 効用関数を  $U_{ij} = a_j + \beta X_{ij} + \gamma_j Z_i + \delta_j W_{ij} + e_{ij}$  とする
- Choice ~  $X_{ij}$  とする変数 |  $Z_i$  とする変数 |  $W_{ij}$  とする変数  
例: `mlogit(choice~disp+feat+price|1|0,data=data,refleve="heinz32")`  
指定しなくても上手く推定してくれる場合も多い

## “iv” は推定された $\lambda_B$ だが $\hat{\lambda}_B > 1$ となることがある

- 下記の CRAN 内文書での説明: The log-sum coefficient is over 1. This implies that there is more substitution across nests than within nests.
- $\lambda_B$  は第1階層の効用の誤差分散と第2階層の効用の誤差分散の比率

<https://cran.r-project.org/web/packages/mlogit/vignettes/e2nlogit.html>