

マーケティング・リサーチ特論 ～階層ベイズ線形回帰モデル～

2026年度1学期： 金曜3限
担当教員： 石垣 司

階層ベイズ線形回帰モデル

回帰モデルと事前分布の階層性の関係図

IW: 逆ウィシャート分布
IG: 逆ガンマ分布

全消費者のパラメータ

Φ の事前分布

V の事前分布

$$\text{vec}(\Phi) \sim N_{(P+1)(L+1)}(\text{vec}(\tilde{M}_\Phi), \tilde{\Sigma}_\Phi) \quad V \sim IW(\tilde{\Psi}, \tilde{\nu})$$

各消費者の i の推定対象

b_i の事前分布

σ^2 の事前分布

$$b_i \sim N_{P+1}(\Phi d_i, V)$$

$$\sigma_i^2 \sim IG(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

観測データ $y_i = X_i b_i + e_i, e_i \sim N(\mathbf{0}, \sigma_i^2 I)$

事後分布: $p(\{b_i\}, \{\sigma_i^2\}, \Phi, V | \{y_i\}, \{X_i\}, \{d_i\}) \propto$

$$p(\{\sigma_i^2\}) p(\Phi, V) \prod_{i=1}^I p(\{b_i\} | \Phi, V, \{d_i\}) p(\{y_i\} | \{b_i\}, \{\sigma_i^2\}, \{X_i\})$$

σ^2 の事前分布

Φ, V の事前分布

b_i の事前分布

尤度関数

準備：逆ウィシャート分布

多変量正規分布の分散共分散行列 Σ の共役事前分布

– $N_P(\mathbf{0}, V)$ に従う v 個の確率変数ベクトルからなる行列 W

$$W \equiv \{w_1, \dots, w_v\}, w_i \sim N_P(\mathbf{0}, V)$$

– $X = (WW^T)^{-1}$ のとき, X は逆ウィシャート分布に従う

$$X \sim IW(\Psi, v)$$

X : $P \times P$ 次元の正定値行列

Ψ : スケールパラメータ ($P \times P$ 次元の正定値行列)

v : 自由度パラメータ

– 確率密度関数

$$f(X; \Psi, v) = \frac{|\Psi|^{v/2}}{2^{vP/2} \Gamma_P(v/2)} |X|^{-(v+P+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(\Psi X^{-1}) \right\}$$

多変量正規分布の $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の事後分布 #1

多変量正規分布 $N_P(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ の同時分布 $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の事後分布の導出

$$p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\Sigma})p(\boldsymbol{\Sigma})$$

– 事前分布の設定

$$p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\Sigma}) \sim N_P(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma}), p(\boldsymbol{\Sigma}) \sim IW(\boldsymbol{\Psi}, \nu)$$

– 事前分布の確率密度関数

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\Sigma})p(\boldsymbol{\Sigma}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^P |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m})\right\} \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\nu/2}}{2^{\nu P/2} \Gamma_P(\nu/2)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(\nu+P+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\right\} \end{aligned}$$

– 尤度関数

$$p(\{\boldsymbol{y}_i\}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^P |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu})\right\}$$

多変量正規分布の $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の事後分布 #2

– $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の事後分布の確率密度関数

$$p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \{\mathbf{y}_i\}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^P \left| \frac{1}{N+1} \boldsymbol{\Sigma} \right|}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{N+1} (\mathbf{m} + N\bar{\mathbf{y}}) \right)^T \{ (N+1) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \} \left(\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{N+1} (\mathbf{m} + N\bar{\mathbf{y}}) \right) \right\} \right] \\ \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{(v+N+1)/2}}{2^{(v+N+1)p/2} \Gamma_P \{ (v+N+1)/2 \}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{N+v+p+2}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{\Psi} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T + \frac{N}{N+1} (\mathbf{m} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{m} - \bar{\mathbf{y}})^T \right) \right\} \right]$$

– $\boldsymbol{\mu}$ の条件付き事後分布

$$\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y} \sim N_p \left(\frac{1}{N+1} (\mathbf{m} + N\bar{\mathbf{y}}), \frac{1}{N+1} \boldsymbol{\Sigma} \right)$$

– $\boldsymbol{\Sigma}$ の周辺事後分布

$$\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y} \sim IW \left(\boldsymbol{\Psi} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T + \frac{N}{N+1} (\mathbf{m} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{m} - \bar{\mathbf{y}})^T, v + N + 1 \right)$$

線形回帰モデルのベイズ推定 #1

サンプルサイズ N の線形重回帰モデルの行列表記

$$\mathbf{y} = X\mathbf{b} + \mathbf{e}, \mathbf{e} \sim N_N(0, \sigma^2 I)$$

– 回帰係数ベクトル \mathbf{b} の事前分布

$$\mathbf{b} \sim N_{P+1}(\mathbf{m}, \sigma^2 A)$$

– 誤差項の分散 σ^2 の事前分布

$$\sigma^2 \sim IG(\alpha, \beta)$$

– 尤度関数

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{b}, X, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - X\mathbf{b})^T (\mathbf{y} - X\mathbf{b})\right]$$

線形回帰モデルのベイズ推定 #2

– 事後分布 $p(\mathbf{b}, \sigma^2 | \mathbf{y}, X)$ の確率密度関数

$$\begin{aligned} p(\mathbf{b}, \sigma^2 | \mathbf{y}, X) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}})^T (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}}) + (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})^T X^T X (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) \right\} \right] \\ &\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^P |\sigma^2 A|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{m})^T (\sigma^2 A)^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{m}) \right\} \frac{\beta^\alpha \exp(-\beta/\sigma^2)}{\Gamma(\alpha) (\sigma^2)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^P |\sigma^2 (X^T X + A^{-1})^{-1}|}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{b} - (X^T X + A^{-1})^{-1} (X^T X \hat{\mathbf{b}} + A^{-1} \mathbf{m}))^T \sigma^{-2} (X^T X + A^{-1}) (\mathbf{b} - (X^T X + \right. \right. \\ &A^{-1})^{-1} (X^T X \hat{\mathbf{b}} + A^{-1} \mathbf{m})) \left. \left. \right\} \right] \frac{(\beta + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}})^T (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}}) + (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m})^T ((X^T X)^{-1} + A)^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m}))^{\alpha + \frac{N+1}{2}} \exp(-\beta/\sigma^2)}{\Gamma(\alpha + \frac{N+1}{2}) (\sigma^2)^{\alpha+1}} \\ &\frac{\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \left\{ \beta + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}})^T (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}}) + (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m})^T ((X^T X)^{-1} + A)^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m}) \right\}\right)}{(\sigma^2)^{\alpha+1 + \frac{N+1}{2}}} \end{aligned}$$

ただし, $\hat{\mathbf{b}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$

check!

完全条件付き事後分布 $p(\mathbf{b} | \sigma^2, \mathbf{y}, X), p(\sigma^2 | \mathbf{y}, X)$

$$\mathbf{b} \sim N_{P+1} \left((X^T X + A^{-1})^{-1} (X^T X \hat{\mathbf{b}} + A^{-1} \mathbf{m}), \sigma^2 (X^T X + A^{-1})^{-1} \right)$$

$$\sigma^2 \sim IG \left(\alpha + \frac{N+1}{2}, \beta + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}})^T (\mathbf{y} - X\hat{\mathbf{b}}) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m})^T ((X^T X)^{-1} + A)^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{m}) \right)$$

個人間モデルのベイズ推定 #1

全消費者 $i = 1, \dots, I$ の個人間モデルの行列表記

$$\mathbf{b}_i = \Phi^T \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_{P+1}(\mathbf{0}, V), i = 1, \dots, I$$

$$[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_I] = \Phi^T [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_I] + [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_I]$$

– 両辺を転置した個人間モデル

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_I^T \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_I^T \end{bmatrix}}_\Delta \Phi + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_I^T \end{bmatrix}}_E$$

$$B = \Delta \Phi + E$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{i=1,p=0} & b_{i=1,p=1} & \cdots & b_{i=1,p=P} \\ b_{i=2,p=0} & b_{i=2,p=1} & \cdots & b_{i=2,p=P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i=I,p=0} & b_{i=I,p=1} & \cdots & b_{i=I,p=P} \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} d_{i=1,l=0} & d_{i=1,l=1} & \cdots & d_{i=1,l=L} \\ d_{i=2,l=0} & d_{i=2,l=1} & \cdots & d_{i=2,l=L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i=I,l=0} & d_{i=I,l=1} & \cdots & d_{i=I,l=L} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{l=0,p=0} & \phi_{l=0,p=1} & \cdots & \phi_{l=0,p=P} \\ \phi_{l=1,p=0} & \phi_{l=1,p=1} & \cdots & \phi_{l=1,p=P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{l=L,p=0} & \phi_{l=L,p=1} & \cdots & \phi_{l=L,p=P} \end{bmatrix}$$

個体間モデルのベイズ推定 #2

全消費者 $i = 1, \dots, I$ の個体間モデルの行列表記

$$B = \Delta\Phi + E, \{\varepsilon_i\}_{i=1, \dots, I} \sim N_{P+1}(\mathbf{0}, V)$$

– 回帰係数行列 Φ の事前分布

$$\text{vec}(\Phi) \sim N_{(P+1)(L+1)}(\text{vec}(\tilde{M}_\Phi), V \otimes \tilde{\Sigma}_\Phi)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{vec}(A) = [a \quad b \quad c \quad d]^T, \otimes: \text{クロネッカー積}$$

– 誤差項の分散共分散行列 V の事前分布

$$V \sim IW(\tilde{\Psi}, \tilde{\nu})$$

– 尤度関数

$$p(B|\Delta, \Phi, V) = \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{(P+1)}|V|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_i^T V^{-1} \varepsilon_i\right)$$

個体間モデルのベイズ推定 #3

– 事後分布 $p(\text{vec}(\Phi), V|B, \Delta)$ の確率密度関数

$$p(\text{vec}(\Phi), V|B, \Delta) = p(B|\text{vec}(\Phi), V, \Delta)p(\text{vec}(\Phi)|V)p(V)$$

$$\begin{aligned} &\propto |V|^{-\frac{I}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \text{vec}(\Phi - \hat{\Phi}) \}^T (V^{-1} \otimes \Delta^T \Delta) \text{vec}(\Phi - \hat{\Phi}) - \frac{1}{2} \{ \text{vec}(\Phi) - \text{vec}(\tilde{M}_\Phi) \}^T (V^{-1} \otimes \tilde{\Sigma}_\Phi) \text{vec}(\Phi - \text{vec}(\tilde{M}_\Phi)) \right] |V|^{-(\tilde{\nu} + (P+1)+1)/2} |V|^{-\frac{I}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[V^{-1} \left\{ \tilde{\Psi} + (B - \Delta \hat{\Phi})^T (B - \Delta \hat{\Phi}) \right\} \right] \right\} \\ &= |V|^{-\frac{I}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\text{vec}(\Phi) - \text{vec} \left\{ (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} (\Delta^T \Delta \hat{\Phi} + \tilde{\Sigma}_\Phi \tilde{M}_\Phi) \right\} \right)^T (V^{-1} \otimes \Delta^T \Delta + V^{-1} \otimes \tilde{\Sigma}_\Phi) \left(\text{vec}(\Phi) - \text{vec} \left\{ (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} (\Delta^T \Delta \hat{\Phi} + \tilde{\Sigma}_\Phi \tilde{M}_\Phi) \right\} \right) \right] |V|^{-((\tilde{\nu} + I) + (P+1)+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[V^{-1} \left\{ \tilde{\Psi} + (B - \Delta \hat{\Phi})^T (B - \Delta \hat{\Phi}) + (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi)^T \left\{ (\Delta^T \Delta)^{-1} + \tilde{\Sigma}_\Phi^{-1} \right\}^{-1} (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi) \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

check!

完全条件付き事後分布 $p(\text{vec}(\Phi)|V, B, \Delta), p(V|\text{vec}(\Phi), B, \Delta)$

$$\text{vec}(\Phi)|B, V, \Delta \sim N_{(P+1)(L+1)} \left(\text{vec} \left\{ (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} (\Delta^T \Delta \hat{\Phi} + \tilde{\Sigma}_\Phi \tilde{M}_\Phi) \right\}, V \otimes (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} \right)$$

$$V|V, \Delta \sim \text{IW} \left(\tilde{\Psi} + (B - \Delta \hat{\Phi})^T (B - \Delta \hat{\Phi}) + (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi)^T \left\{ (\Delta^T \Delta)^{-1} + \tilde{\Sigma}_\Phi^{-1} \right\}^{-1} (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi), \tilde{\nu} + I \right)$$

ここで, $\hat{\Phi} = (\Delta^T \Delta)^{-1} \Delta^T B$

階層ベイズ線形回帰モデルの事後分布の推定

階層ベイズ線形回帰モデルのGibbsサンプリング

- 適当な初期値の下, $t = 0, 1, \dots, T$ で以下を繰り返す

For $t = 0, 1, \dots, T$ まで

確率分布内の各パラメータの
 t や $t+1$ の記述は省略

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } i = 1, \dots, I \text{ まで} \\ \hat{\mathbf{b}}_i = (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \mathbf{y}_i \\ \mathbf{b}_{i,t+1} \sim N_{P+1} \left((X_i^T X_i + \sigma_i^2 V^{-1})^{-1} (X_i^T X_i \hat{\mathbf{b}}_i + \sigma_i^2 V^{-1} \Phi^T \mathbf{d}_i), \sigma_i^2 (X_i^T X_i + \sigma_i^2 V^{-1})^{-1} \right) \\ \mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{b}}_i - \Phi^T \mathbf{d}_i \\ \sigma_{i,t+1}^2 \sim IG \left(\alpha + \frac{N+1}{2}, \beta + \frac{1}{2} (\mathbf{y}_i - X_i \hat{\mathbf{b}}_i)^T (\mathbf{y}_i - X_i \hat{\mathbf{b}}_i) + \frac{1}{2} \mathbf{k}_i^T \{ (X_i^T X_i)^{-1} + \sigma_i^2 V^{-1} \}^{-1} \mathbf{k}_i \right) \\ \\ \hat{\Phi}_{t+1} = (\Delta^T \Delta)^{-1} \Delta^T B \\ \text{vec}(\Phi_{t+1}) \sim N_{(P+1)(L+1)} \left(\text{vec} \left\{ (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} (\Delta^T \Delta \hat{\Phi} + \tilde{\Sigma}_\Phi \tilde{M}_\Phi) \right\}, V \otimes (\Delta^T \Delta + \tilde{\Sigma}_\Phi)^{-1} \right) \\ V_{t+1} \sim IW \left(\tilde{\Psi} + (B - \Delta \hat{\Phi})^T (B - \Delta \hat{\Phi}) + (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi)^T \{ (\Delta^T \Delta)^{-1} + \tilde{\Sigma}_\Phi^{-1} \}^{-1} (\hat{\Phi} - \tilde{M}_\Phi), \tilde{\nu} + I \right) \end{array} \right.$$

- 採択率1で各変数のマルコフ連鎖を生成できる

ベイズモデルの事後分布の信用区間 #1

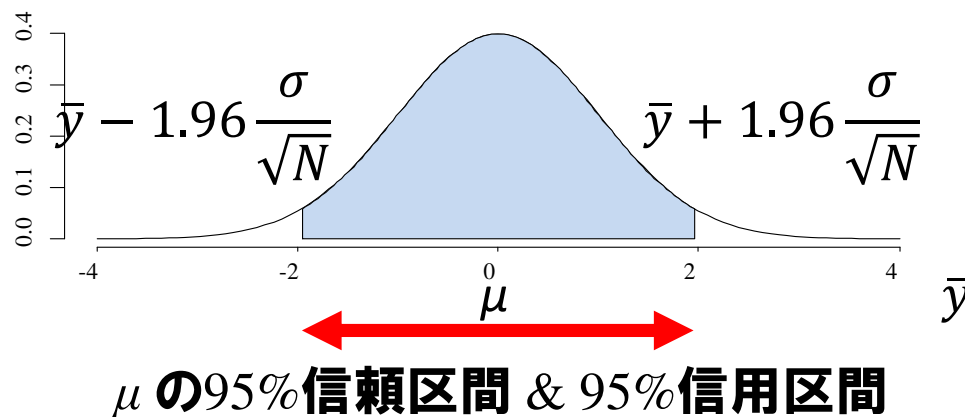
ベイズ統計学での区間推定に対応する区間(確信区間)

– 頻度主義的統計学での95%信頼区間

意味: サンプルサイズ N の標本抽出を M 回繰り返し、各回で区間を算出したとき、 $0.95 \times M$ 回はパラメータの真の値を区間内に含んでいる (真のパラメータの値は定数)

– ベイズ統計学での95%信用区間

意味: パラメータの値がその区間内にある確率は95%である (パラメータは確率変数)



正規分布を考えると信頼区間と信用区間の数学的表現は同一。
しかし、両者の意味・解釈は異なる

ベイズモデルの事後分布の信用区間 #2

最高事後密度区間(HPDI: Highest Posterior Density Interval)

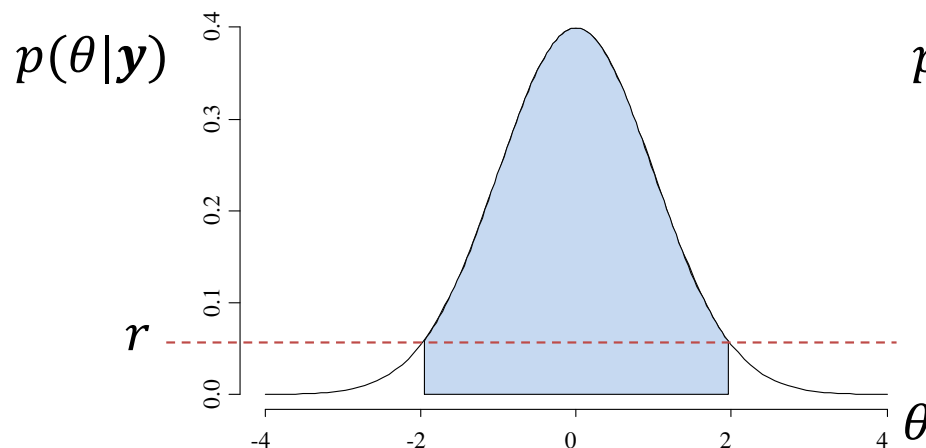
– 左右非対称の場合等の利用に適した区間

ベイズ推定ではHPDIが推定結果の解釈に良く用いられる

– 95%HPDIの定義: ある定数 r と $R = \{\theta | p(\theta|y) \geq r\}$ で

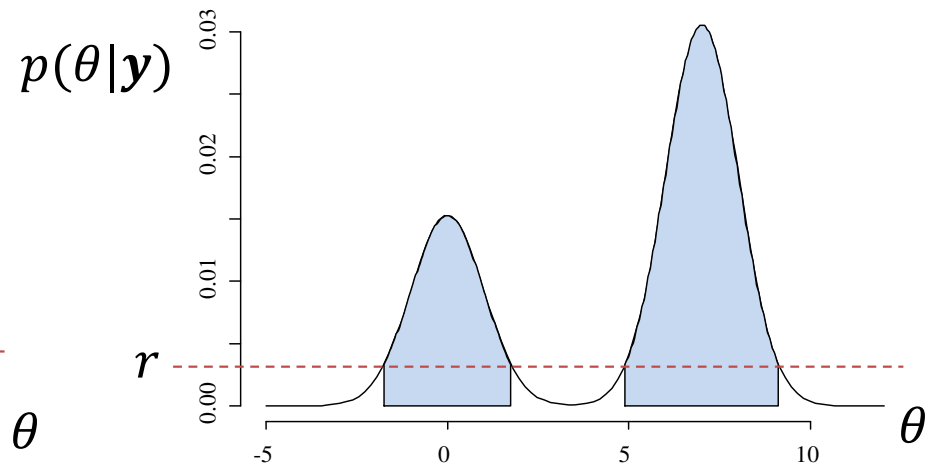
$\int_R p(\theta|y) d\theta = 0.95$ となる区間

95%HPDIは  の面積が0.95 となる r で決まる区間



単峰で左右対象のときは
信頼区間と一致

95%HPDI



95%HPDI

階層ベイズ線形回帰モデル分析の実例

スーパーマーケットでのオレンジジュースの販売データ

- シカゴの Dominick's Finer Food チェーン 83店舗で販売された, 11ブランドの約121週の週次データ

Tropicana Premium 64 oz, Tropicana Premium 96 oz, Florida's Natural 64 oz, Tropicana 64 oz, Minute Maid 64 oz, Minute Maid 96 oz, Citrus Hill 64 oz, Tree Fresh 64 oz, Florida Gold 64 oz, Dominicks 64 oz, Dominicks 128 oz

- 目的変数: ある一つのブランドの各店舗での各週の販売個数
- 説明変数: 11ブランドの各週の価格(連続変数), 店舗内クーポンの有無, チラシ広告の有無(離散変数)
- 店舗レベル変数: 各店舗の商圏内の60歳以上の割合, 大学卒業の割合, 黒人・ヒスパニックの割合, 5人以上家族の割合など11種類

<https://search.r-project.org/CRAN/refmans/bayesm/html/orangeJuice.html>

Alan L. Montgomery (1997), "Creating Micro-Marketing Pricing Strategies Using Supermarket Scanner Data," Marketing Science 16(4) 315–337.

データの記述統計量

Table 1 Descriptive Statistics for Price, Market Share, and Profit Margins Across Stores (Prices are standardized for a 64 oz. unit)

Description	Price for 64 oz.		Market Share				Profit Margin
	Mean	Std Dev	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum	
<i>Premium:</i>							
Tropicana Premium 64 oz.	2.87	0.55	16.1%	3.7	9.0%	28.2%	22.6%
Tropicana Premium 96 oz.	3.12	0.39	10.7%	4.1	3.4%	23.1%	25.8%
Floridas Natural 64 oz.	2.86	0.31	4.0%	1.1	2.2%	7.0%	28.9%
<i>National:</i>							
Tropicana 64 oz.	2.27	0.41	15.8%	2.6	10.1%	20.0%	21.5%
Minute Maid 64 oz.	2.24	0.40	16.9%	1.6	13.3%	21.6%	19.4%
Minute Maid 96 oz.	2.68	0.36	5.7%	1.5	2.7%	9.3%	25.3%
Citrus Hill 64 oz.	2.32	0.34	5.1%	0.6	3.7%	6.6%	21.9%
Tree Fresh 64 oz.	2.18	0.29	2.5%	0.7	0.9%	4.0%	27.1%
Florida Gold 64 oz.	2.07	0.41	2.6%	0.6	1.4%	4.2%	27.2%
<i>Store:</i>							
Dominicks 64 oz.	1.74	0.39	13.6%	3.5	5.6%	20.9%	23.8%
Dominicks 128 oz.	1.83	0.32	6.9%	2.5	2.4%	16.4%	27.9%

Rのbayesmパッケージ内のorangejuiceデータではPriceの値が変換されているため、推定結果の解釈には注意が必要

Table 2 Descriptive Statistics for Demographic/Competitive Variables of the Store's Trading Area Across the Chain's 83 Stores

Variable	Description	Average	Std. Dev.	Minimum	Maximum
Elderly	% of population over age 60	0.173	0.062	0.058	0.307
Educ	% of population with a college degree	0.226	0.111	0.050	0.528
Ethnic	% of population that is black or Hispanic	0.155	0.188	0.024	0.996
Income	Log of median income	10.618	0.283	9.867	11.236
Fam_Size	% of households with five or more members	0.116	0.030	0.014	0.216
Work_Wom	% of women who work	0.359	0.053	0.244	0.472
House_Val	% of homes with a value greater than \$150,000	0.345	0.241	0.003	0.917
Ware_Dis	Distance (miles) to nearest warehouse	6.150	3.790	0.132	17.856
Ware_Vol	Ratio of DFF store sales to nearest warehouse	1.321	0.493	0.500	3.273
Super_Dis	Average distance (miles) to nearest five supermarkets	2.118	0.738	0.773	4.108
Super_Vol	Ratio of DFF store sales to average of nearest five supermarkets	0.452	0.206	0.096	1.114

Rによる階層ベイズ線形回帰モデル分析

観測モデル

$$\log(y_{it}) = b_{i0} + \sum_{j=1}^{11} b_{i1j} P_{itj} + b_{i12} C_{it} + b_{i13} F_{it} + e_{it}$$

- y_{it}, C_{it}, F_{it} : 店舗 i の第 t 週の対象ブランドの販売個数, 店舗内クーポンの有無, チラシ広告の有無
- P_{itj} : 店舗 i の第 t 週のブランド j の販売価格
- $e_{it} \sim \text{i. i. d. } N(0, \sigma_i^2)$



階層モデル

$$b_{im} = \phi_{m0} + \sum_{k=1}^{11} \phi_{mk} d_{hk} + \varepsilon_{hm}, (m = 0, \dots, 13)$$

$$\varepsilon_{hm} \sim N(0, v_{hm}^2), \text{COV}(\varepsilon_{hm}, \varepsilon_{hm'}) = v_{mm'}$$

- d_{ik} : 店舗 i の第 k 番目の属性データ ($k = 1, \dots, 11$) (属性変数 m と m' の共分散)

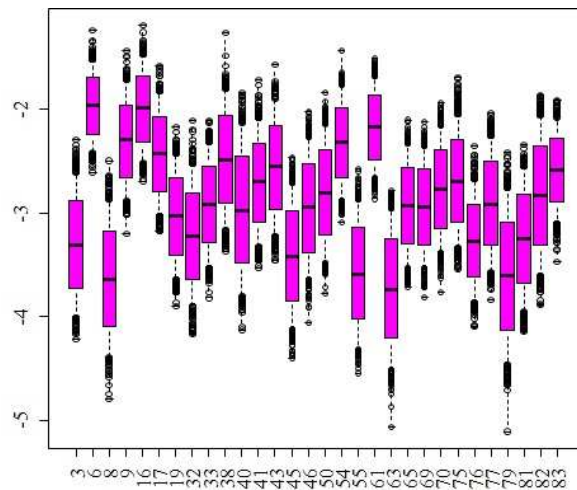


- #1 $v_{mm'}$ は共役事前分布である逆ウィシャート分布を事前分布として設定して事後分布を求めるのが一般的
- #2 プログラムコードはGoogle Classroomで配布
- #3 $\{\delta_{mk}\}$ は観測モデルのパラメータ数(14)×階層モデルの変数の数+1(11+1=12)個

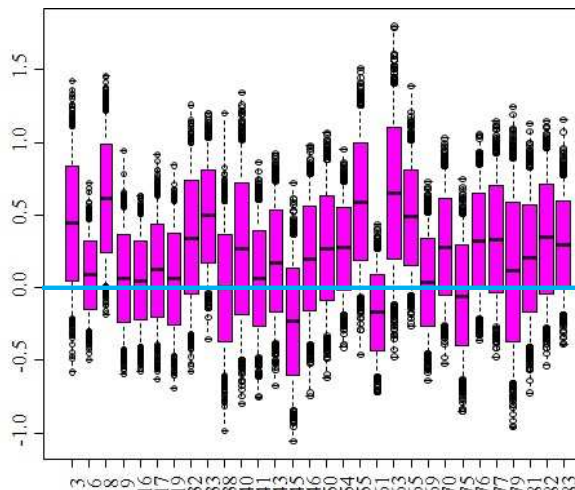
分析結果～観測モデルの推定結果 #1

ブランド1に対する $\{b_{im}\}$ の推定結果～全体傾向

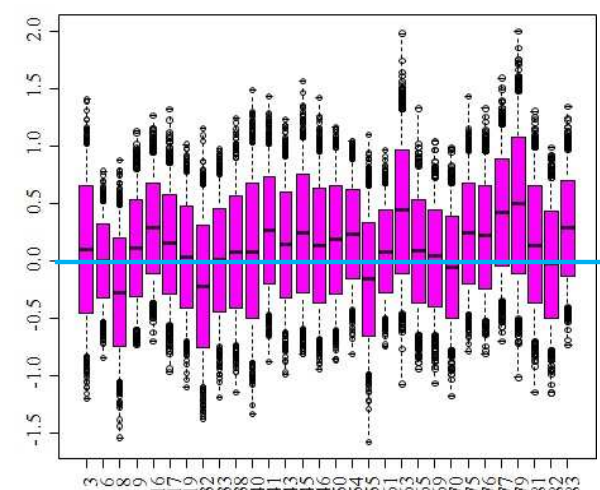
$\{b_{i,1}\}$:ブランド1の価格係数



$\{b_{i,4}\}$:ブランド4の価格係数



$\{b_{i,7}\}$:ブランド7の価格係数

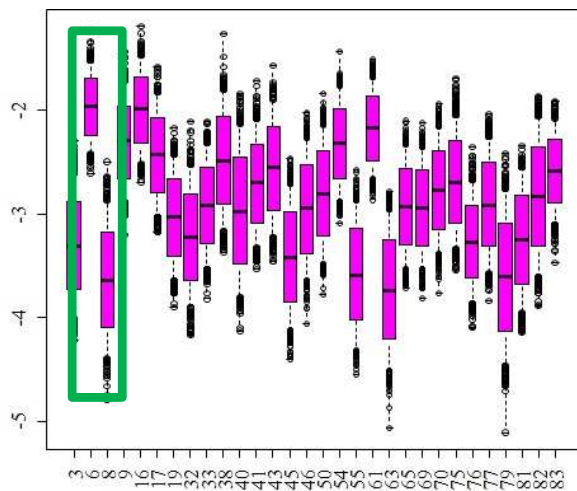


- 全ての店舗でブランド1の価格係数の値は有意に負
⇒ 価格を下げると販売数は増える傾向
- いくつかの店舗ではブランド4の価格係数の値は有意に正
⇒ ブランド4の価格を下げるとブランド1の販売数も下がる競合関係の傾向
- 全ての店舗でブランド7の係数は信用区間にゼロを含む
⇒ ブランド7の価格とブランド1販売数に関係があるとは言えない

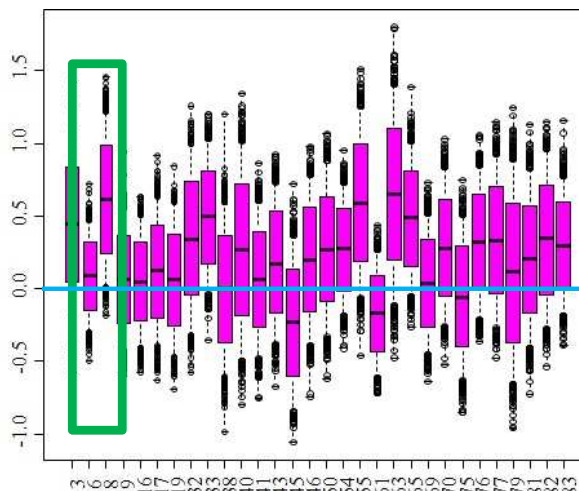
分析結果～観測モデルの推定結果 #2

ブランド1に対する $\{b_{im}\}$ の推定結果～店舗の異質性

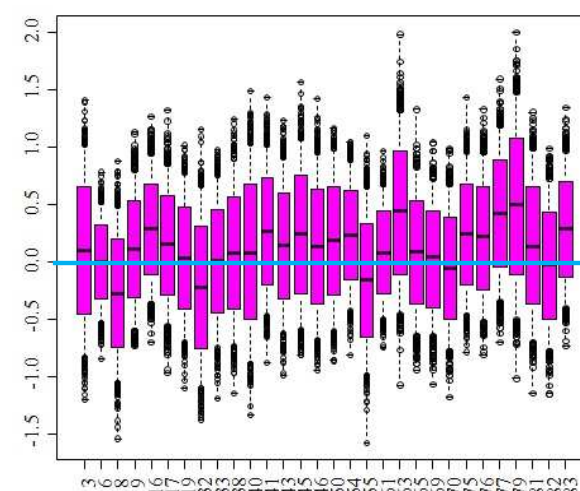
$\{b_{i,1}\}$:ブランド1の価格係数



$\{b_{i,4}\}$:ブランド4の価格係数



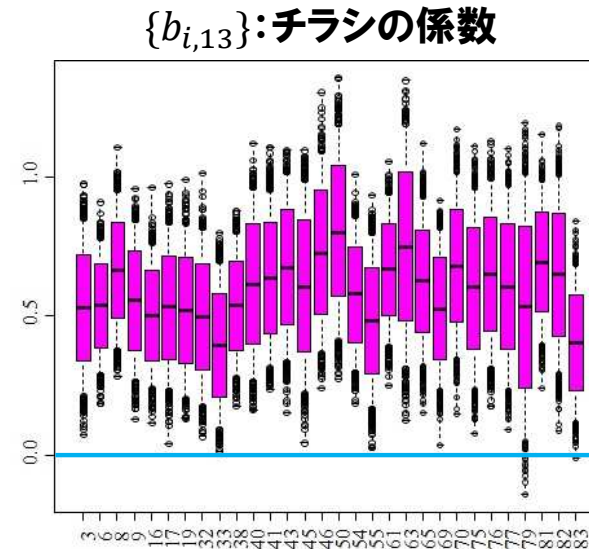
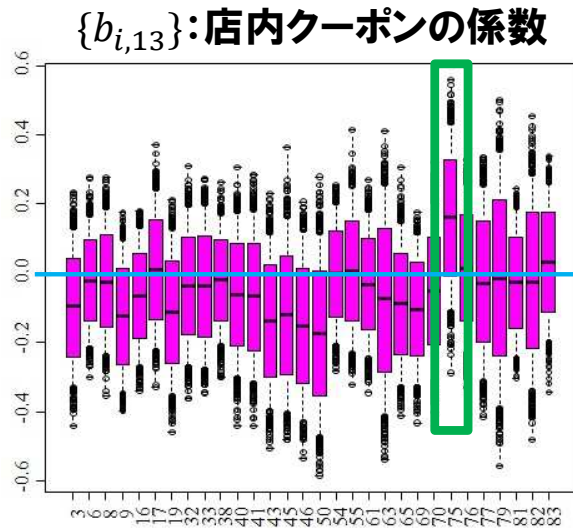
$\{b_{i,7}\}$:ブランド7の価格係数



- 店舗6よりも店舗8の方がブランド1の値下げへの販売数の反応が大きい。店舗によって値下げに対する感度が異なる傾向
- 店舗8ではブランド1とブランド4は競合関係にあると解釈できるが、店舗6ではそうではない。店舗によってブランド間の競合関係が異なる傾向
- すべての店舗でブランド1とブランド7の競合関係は見られない。この関係には店舗の異質性は認められない

分析結果～観測モデルの推定結果 #3

ブランド1に対する $\{b_{im}\}$ の推定結果



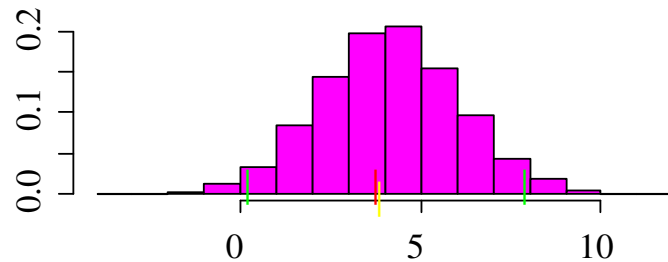
- ほとんどの店舗で店内クーポンの配布はブランド1の販売数増加に寄与していない。ただし、店舗75では有効に作用している可能性が示唆される
- 全ての店舗でチラシの係数の値は有意に正であり、ブランド1の販売数増回に寄与していると解釈できる。また、ブランド1の価格係数と比較して推定結果の店舗間の異質性は小さい

分析結果～階層モデルの推定結果

ブランド1に対する $\{\phi_{mk}\}$ の推定結果

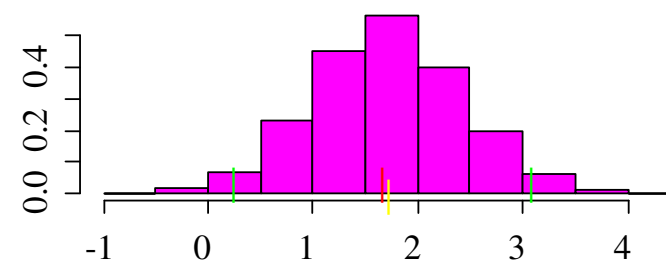
(95%信用区間にゼロを含まなかった結果のみを示す)

ブランド1のブランド価値(切片)×HVAL150の係数



$\phi_{m=0,k=7}$ の事後分布

ブランド1の価格係数×HVAL150の係数



$\phi_{m=1,k=7}$ の事後分布

HVAL150: percentage of households worth more than \$150,000

- HVAL150の割合が高い地域ほど、ブランド1を買いやすい傾向にある
- HVAL150の割合が高い地域ほど、ブランド1の価格係数は大きくなる傾向にある ⇒ 値下げに対する反応は小さくなる
- 考察: HVAL150の割合が高い地域では、値下げをしなくてもブランド1を購入してくれる傾向にある。ブランド1は Tropicana Premium (高価格帯商品)であり、上の結果は商品イメージと合致していることが実証されている