経済経営数学I 補助資料 ～動的計画法～

2023年度1学期:　水曜1限
担当教員:　石垣　司

離散最適化問題

変数が離散値をとる最適化問題

- 一般には変数が取り得る全てのパターンを調べる必要あり
  例: $x \in \{0,1\}, y \in \{0,1\}$ で $f(x,y)$ を最大とする x, y を求めよ
- 変数の種類の増加でパターンは指数的に増加
  例:0~9の数字のみが使える N 桁のパスワードを考える。$x_1, \ldots, x_N$ はパスワードの入力(数字)とする。パスワードが一致したとき $f(x_1, \ldots, x_N) = 1$, それ以外は $f(x_1, \ldots, x_N) = 0$ とすると離散最適化問題
  2桁のパスワードのパターン数:　$10^2 = 100$
  10桁のパスワードのパターン数:　$10^{10} = 10{,}000{,}000{,}000$
  QRコード(バージョン5、レベルH)で表せる数字パターン数:　10^{106}
  宇宙(観測可能な宇宙)の全原子の概数:　10^{80}
- 問題によっては効率的に最適解を求めることができる

多段決定問題

離散最適化問題の定式化

- 各変数 x_i $(i = 1, \ldots, N)$ が有限個の離散値 $K_i = \left\{k_1^{(i)}, \ldots, k_{M_i}^{(i)}\right\}$ を取るとき, 目的関数 $f(x_1, \ldots, x_N)$ を最大化(最小化)する問題

多段決定問題の定式化

- 離散最適化問題で目的関数が次のように分解できる問題

$$f(x_1, \ldots, x_N) = f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_2, x_3) +, \ldots, + f_N(x_{N-1}, x_N)$$

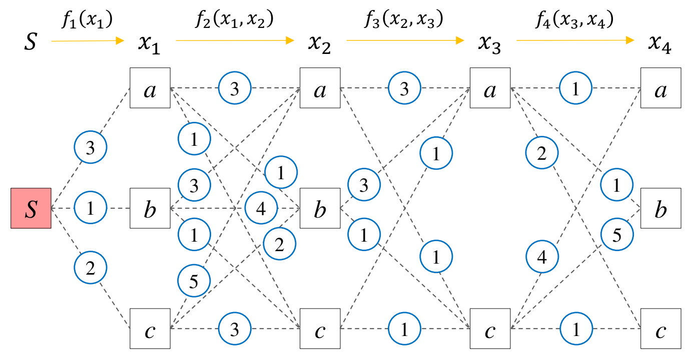
動的計画法

- 多段決定問題を効率的に解く方法
  本日の授業はその一例の紹介

最適経路問題～多段決定問題の例

S からスタートし x_1 から x_4 の各段階で1つの□を選ぶ。その経路中の○の数値の合計が最も高くなる経路を選ぶ

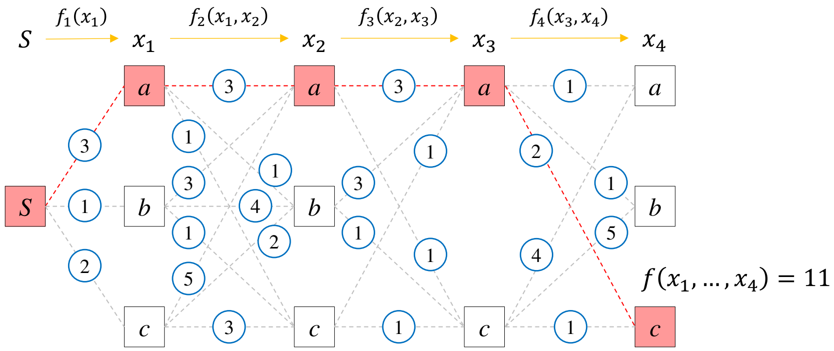
- 目的関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_2, x_3) + f_4(x_3, x_4)$
  例: $f_1(x_1 = a) = 3, f_2(x_1 = b, x_2 = c) = 1$
- 離散変数 $x_1, x_2, x_4 \in \{a, b, c\}, x_3 \in \{a, c\}$



最適経路問題～失敗の例

失敗例

- $f_1(x_1)$ が最大となる x_1 を選択($x_1 = a$)
- $x_1 = a$ に対して、$f_2(x_1, x_2)$ が最大となる x_2 を選択($x_2 = a$)
- $x_2 = a$ に対して、$f_3(x_2, x_3)$ が最大となる x_3 を選択($x_3 = a$)
- $x_3 = a$ に対して、$f_4(x_3, x_4)$ が最大となる x_4 を選択($x_4 = c$)



動的計画法の考え方

多段決定問題の目的関数の分解と最適化

$$f(x_1, \ldots, x_4) = f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + f_3(x_2, x_3) + f_4(x_3, x_4)$$

1. x_1 は f_1 と f_2 のみに関係
2. x_2 は f_2 と f_3 のみに関係
3. x_3 は f_3 と f_4 のみに関係
4. x_4 は f_4 のみに関係

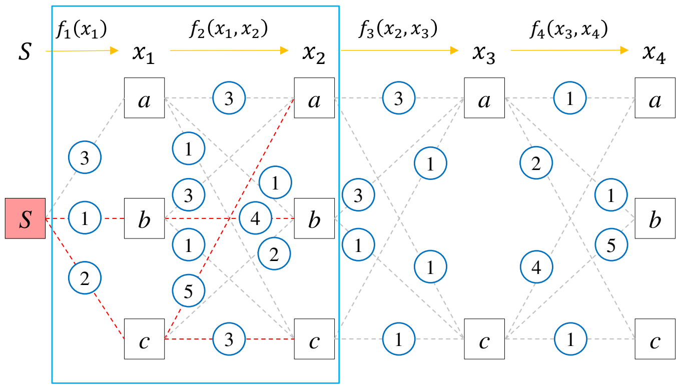
動的計画法

1. x_2 の関数 $g_2(x_2) = f_1(k_1) + f_2(k_1, x_2)$ を考える。ここで、k_1 は各 x_2 の値に関して $g_2(x_2)$ を最大化する変数の値 $x_1 = k_1$ である
2. x_3 の関数 $g_3(x_3) = g_2(k_2) + f_3(k_2, x_3)$ を考える。ここで、k_2 は各 x_3 の値に関して $g_3(x_3)$ を最大化する変数の値 $x_2 = k_2$ である
3. x_4 の関数 $g_4(x_4) = g_3(k_3) + f_4(k_3, x_4)$ を考える。ここで、k_3 は各 x_4 の値に関して $g_4(x_4)$ を最大化する変数の値 $x_3 = k_3$ である
4. $g_4(x_4)$ を最大化する変数の値 x_4^* が x_4 の最適値である。また、$g_4(x_4 = x_4^*)$ のときの k_3 が x_3 の最適値 x_3^*, $g_3(x_3 = x_3^*)$ のときの k_2 が x_2 の最適値 x_2^* , $g_2(x_2 = x_2^*)$ のときの k_1 が x_1 の最適値 x_1^*

動的計画法の手続き #1

1. x_2 の関数 $g_2(x_2) = f_1(k_1) + f_2(k_1, x_2)$ を考える。ここで、k_1 は各 x_2 の値に関して $g_2(x_2)$ を最大化する変数の値 $x_1 = k_1$ である

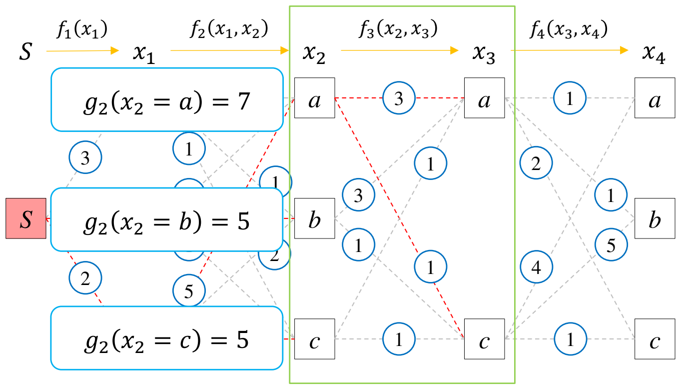
$x_2 = a$ のとき $k_1 = c$ より	$g_2(x_2 = a) = f_1(c) + f_2(c, a) = 7$
$x_2 = b$ のとき $k_1 = b$ より	$g_2(x_2 = b) = f_1(b) + f_2(b, b) = 5$
$x_2 = c$ のとき $k_1 = c$ より	$g_2(x_2 = c) = f_1(c) + f_2(c, c) = 5$



動的計画法の手続き #2

2. x_3 の関数 $g_3(x_3) = g_2(k_2) + f_3(k_2, x_3)$ を考える。ここで, k_2 は各 x_3 の値に関して $g_3(x_3)$ を最大化する変数の値 $x_2 = k_2$ である

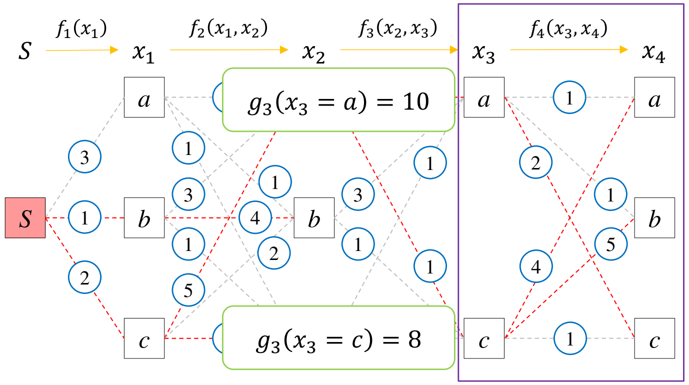
$x_3 = a$ のとき $k_2 = a$ より	$g_3(x_3 = a) = g_2(a) + f_3(a, a) = 10$
$x_3 = c$ のとき $k_2 = a$ より	$g_3(x_3 = c) = g_2(a) + f_3(a, c) = 8$



動的計画法の手続き #3

3. x_4 の関数 $g_4(x_4) = g_3(k_3) + f_4(k_3, x_4)$ を考える。ここで, k_3 は各 x_4 の値に関して $g_4(x_4)$ を最大化する変数の値 $x_3 = k_3$ である

$x_4 = a$ のとき $k_3 = c$ より　$g_4(x_4 = a) = g_3(c) + f_4(c, a) = 12$
$x_4 = b$ のとき $k_3 = c$ より　$g_4(x_4 = b) = g_3(c) + f_4(c, b) = 13$
$x_4 = c$ のとき $k_3 = a$ より　$g_4(x_4 = c) = g_3(a) + f_4(a, c) = 12$

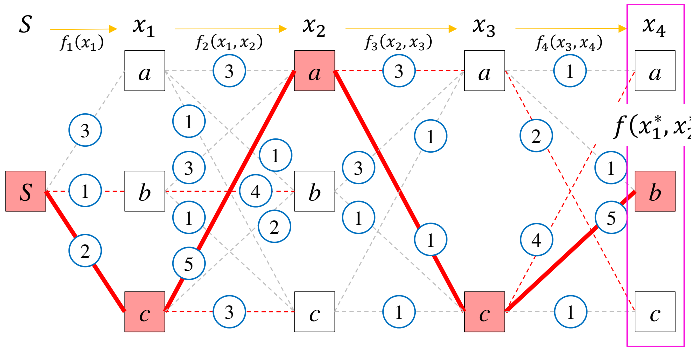


動的計画法の手続き #4

4. $g_4(x_4)$ を最大化する変数の値 x_4^* が x_4 の最適値である。また, $g_4(x_4 = x_4^*)$ のときの k_3 が x_3 の最適値 x_3^*, $g_3(x_3 = x_3^*)$ のときの k_2 が x_2 の最適値 x_2^*, $g_2(x_2 = x_2^*)$ のときの k_1 が x_1 の最適値 x_1^*

$g_4(x_4 = a) = 12$
$g_4(x_4 = b) = 13$
$g_4(x_4 = c) = 12$

$x_4 = b$ のとき $k_3 = c$ より $g_4(x_4 = b) = g_3(c) + f_2(c, b) = 13$
$x_3 = c$ のとき $k_2 = a$ より $g_3(x_3 = c) = g_2(a) + f_3(a, c) = 8$
$x_2 = a$ のとき $k_1 = c$ より $g_2(x_2 = a) = f_1(c) + f_2(c, a) = 7$



$x_1^* = c$
$x_2^* = a$
$x_3^* = c$
$x_4^* = b$

最適性の原理

Richard E. Bellman
1920 – 1984

Bellmanによる最適性の原理

- 最適な方策は, 初期状態と初期決定がどんなものであれ, その結果得られる次の状態に関して, 以降の決定が必ず最適方策になっているという性質をもつ (Wikipedia)

動的計画法の手続きで利用する再帰式

(前頁までの最適経路問題の例)

$$g_{i+1}(x_{i+1}) = \max_{x_i}\{g_i(x_i) + f_{i+1}(x_i, x_{i+1})\}$$

初期状態： $g_1(x_1) = \max_{x_0}\{f_0(S) + f_1(S, x_1)\} = f_1(x_1)$

#メモ　より一般の問題に対しても動的計画法は適用できる。本授業の範囲を超えるが、興味のある人は、Bellman方程式や連続変数への拡張であるHamilton–Jacobi–Bellman方程式を学習してほしい。動的計画法は制御工学から生まれたが、経済学でも多様な問題を解くために用いられている。

演習問題

次の最適経路問題の目的関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を最大化する最適な経路を求めなさい