

経済経営数学I 補助資料 ～不等式制約付き最適化問題～

2023年度1学期: 水曜1限
担当教員: 石垣 司

不等式制約付き最適化問題

不等式制約付き最適化問題

- 目的関数 $\min_{x_1, \dots, x_N} f(x_1, \dots, x_N)$ or $\max_{x_1, \dots, x_N} -f(x_1, \dots, x_N)$
- 制約条件 $g(x_1, \dots, x_N) \leq 0$

※ここでは、目的関数 f の最小化(極小値を求める問題)を定式化していることに注意

- 例: 消費量や投入量は非負制約 $x_i \geq 0$
- 例: 効用最大化の予算制約 $p_x x + p_y y \leq I$
- 例: 費用最小化の生産量制約 $x + y \geq M$

KKT条件(Karush-Kuhn-Tuckerの条件)を考慮したラグランジュ未定乗数法で最適解の候補を見つける

不等式制約付き最適化問題のための ラグランジュ未定乗数法

ラグランジュ関数: $L = f(x_1, \dots, x_N) - \lambda g(x_1, \dots, x_N)$

$f(x_1, \dots, x_N)$ が点 (a_1, \dots, a_N) で極小値をとり、かつ、
 $\left[\frac{\partial g(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_N} \right]^T \neq 0$ ならば

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_1} =, \dots, \frac{\partial L(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_N} = 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ \lambda g(a_1, \dots, a_N) = 0 \quad \dots \textcircled{2} \\ g(a_1, \dots, a_N) \leq 0 \quad \dots \textcircled{3} \\ \lambda \leq 0 \quad \dots \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{check!}$$

この①～④の関係をKKT条件とよぶ。この条件をすべて満たす点を探す。³

補足: KKT条件の④(ラグランジュ乗数の正負)

ラグランジュ関数の定義と目的関数の最大化 or 最小化の問題設定の違いによってKKT条件が異なるように見える場合がある。しかし、本質は同じ

目的関数	$\min_{x,y} f(x,y)$	目的関数	$\max_{x,y} f(x,y)$
ラグランジュ関数	$L = f(x,y) - \lambda g(x,y)$	ラグランジュ関数	$L = f(x,y) - \lambda g(x,y)$
KKT条件の④	$\lambda \leq 0$	KKT条件の④	$\lambda \geq 0$
目的関数	$\min_{x,y} f(x,y)$	目的関数	$\max_{x,y} f(x,y)$
ラグランジュ関数	$L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$	ラグランジュ関数	$L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$
KKT条件の④	$\lambda \geq 0$	KKT条件の④	$\lambda \leq 0$

補足：複数の不等式制約がある場合

複数の不等式制約がある最適化問題

- 目的関数 $\min_{x_1, \dots, x_N} f(x_1, \dots, x_N)$ or $\max_{x_1, \dots, x_N} -f(x_1, \dots, x_N)$
- 制約条件 $g_i(x_1, \dots, x_N) \leq 0$
- ラグランジュ関数: $L = f(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^M \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_N)$
- KKT条件

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} =, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_N} = 0 \\ \lambda_i g_i(a_1, \dots, a_N) = 0 \quad (i = 1, \dots, M) \\ g_i(a_1, \dots, a_N) \leq 0 \\ \lambda_i \leq 0 \end{cases}$$

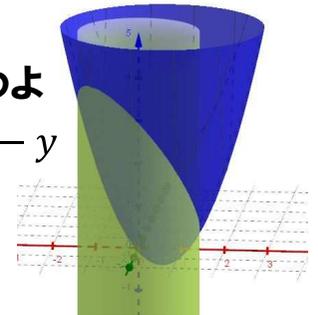
5

練習問題

問題

- 1. 次の関数の極小点の候補を求めよ
- 目的関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$
- 制約条件 $x^2 + y^2 = 2$

- 2. 次の関数の極小点の候補を求めよ
- 目的関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$
- 制約条件 $x^2 + y^2 \leq 2$



6

演習問題

次の関数の極小点の候補を求めなさい。また、その極小点の候補における $f(x, y)$ 値を求めなさい。

目的関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y$
制約条件 $x^2 + y^2 \leq 1$

7