経済経営数学I 補助資料 ～2次形式と最適化問題～

2023年度1学期:　水曜1限
担当教員:　石垣　司

対称行列と直交行列

対称行列 $A = A^T$

- **例:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

check!

- **性質: 対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する**

直交行列 $UU^T = U^TU = I$ **または** $U^{-1} = U^T$

- **例:** $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- **性質: 正方行列 U の各列のベクトルが直交していて, かつ, ノルムが1に正規化されている**

対称行列の直交行列による対角化

対称行列の固有値と固有ベクトル

- **対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルを正規化して並べた行列 U は直交行列となる**
- **対称行列は U^TAU で対角化できる**

問題: 次の行列を直交行列 U により対角化しなさい

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad -1]^T,\quad \lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 1]^T$
- $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\therefore\ U^TAU = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2次形式の最適化問題と固有値問題

目的関数が2次形式の制約付き最適化問題

- **目的関数**　$\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$
- **制約条件**　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$

- **固有値問題に帰着する** check!

- **A が半正定値対称行列のとき, 最も大きな(小さな)値をもつ固有値に対する固有ベクトルが $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ を最大(最小)とし, その固有値の値は $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ に一致する**

半正定値対称行列: $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x} \geq 0$ を満たす対称行列 A

- $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ **とすると関数** $f(\boldsymbol{x})$ **は凸関数**

$\because$ **定理:** $f(\boldsymbol{x})$ **は凸関数** $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x})$ **のヘッセ行列は半正定値**

$f(\boldsymbol{x})$ **のヘッセ行列:** $H = 2A$

データサイエンスの例：分散共分散行列

#メモ　図のデータは分散共分散行列 V の
多変量正規分布から1000個の乱数を発生

分散共分散行列 V

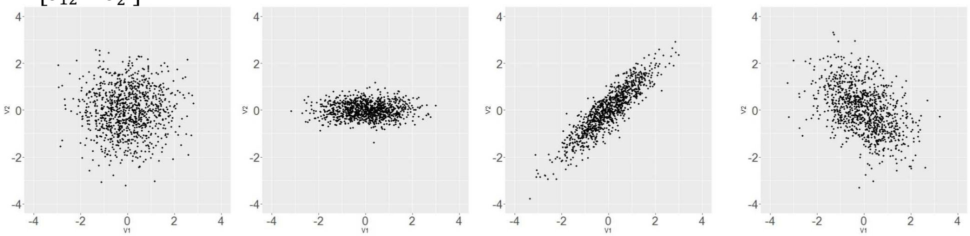
– $x_1, \dots, x_M$ を確率変数，期待値を E で表すとき、

$$V = \begin{bmatrix} E[(x_1 - E[x_1])(x_1 - E[x_1])] & \cdots & E[(x_M - E[x_M])(x_1 - E[x_1])] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_M - E[x_M])(x_1 - E[x_1])] & \cdots & E[(x_M - E[x_M])(x_M - E[x_M])] \end{bmatrix}$$

対角成分は各 x_i の分散(σ_i^2)

対角成分以外の要素は各 x_i と x_j の共分散(σ_{ij})（変数間の線形関係の強さを表す）

$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$



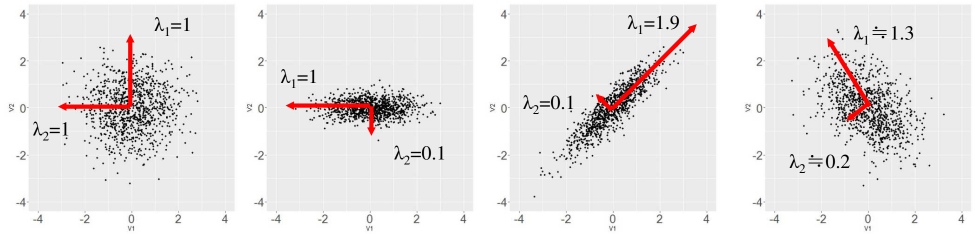
分散共分散行列と固有値問題

#メモ　多変量解析の手法である
主成分分析や判別分析の数学的本質

分散共分散行列 V は半正定値対称行列

– 各固有ベクトルは直交する

$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$　$V = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$



$\boldsymbol{p}_1 = k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{p}_1 = k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{p}_1 = k\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = k\begin{bmatrix} -0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{p}_1 = k\begin{bmatrix} -0.85 \\ 0.53 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = k\begin{bmatrix} -0.53 \\ -0.85 \end{bmatrix}$

– V の最大固有値に対応する固有ベクトルは，データと直線のズレの2乗の期待値を最小にする直線と同じ方向を向く

演習問題

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ のとき，次の制約条件の下で，目的関数を最大化するベクトル $\boldsymbol{x}$ を見つけなさい

目的関数： $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

制約条件： $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 1$