経済経営数学I 補助資料 ～制約付き最適化問題～

2023年度1学期:　水曜1限
担当教員:　石垣　司

制約付き最適化問題

制約条件の下で目的関数 f を最適化
- 例: 予算制約の下での効用最大化
- 例: 労働・資本投入量制約の下での費用最小化

制約付き最適化問題
- $\max_{x_1,\cdots,x_N} f(x_1,\cdots,x_N)$ or $\min_{x_1,\cdots,x_N} f(x_1,\cdots,x_N)$
- $\text{s.t. } g(x_1,\cdots,x_N)=0$

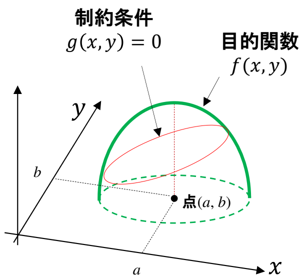
  s.t. は subject to や such that の略

- 制約条件 $g(x_1,\cdots,x_N)=0$ を満たす点の中から, 目的関数 $f(x_1,\cdots,x_N)$ を最大(最小)とする点 $(a_1,\cdots,a_N)$ を探し出す

制約付き最適化問題の性質

制約無し最適化問題の解との関係

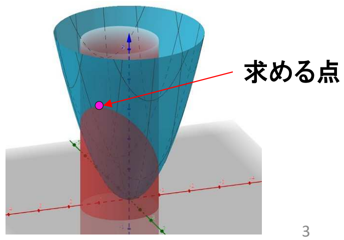
制約付き最大化問題の解 $f(a_1,\cdots,a_N)$
制約無し最大化問題の解 $f(b_1,\cdots,b_N)$
- $f(a_1,\cdots,a_N)\le f(b_1,\cdots,b_N)$



制約付き最適化問題では
点(a,b)が最適点ではない

具体例
- $\max_{x,y}\ x^2+y^2$
- $\text{s.t. } x^2+y^2-x-y-1=0$

制約無しの場合 x^2+y^2 の最大化は ∞
制約付きの場合は解あり



ラグランジュ未定乗数法

目的関数 $f(x_1,\cdots,x_N)$
制約条件 $g(x_1,\cdots,x_N)=0$

ラグランジュ関数 $L=f(x_1,\cdots,x_N)-\lambda g(x_1,\cdots,x_N)$
- ラグランジュ乗数: $\lambda\in\mathbb{R}$
- f,g は一階微分可能
- $\frac{\partial L(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_i}$ は L を x_i で偏微分し, その後 $(a_1,\cdots,a_N)$ を代入を表記

制約条件を満たす $f(x_1,\cdots,x_N)$ が点 $(a_1,\cdots,a_N)$ で極値をとり, かつ, $\left[\frac{\partial g(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_N}\right]^T\neq\mathbf{0}$ ならば

check!

$$\Rightarrow\ \frac{\partial L(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_1}=,\cdots,\frac{\partial L(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_N}=\frac{\partial L(a_1,\cdots,a_N)}{\partial\lambda}=0$$

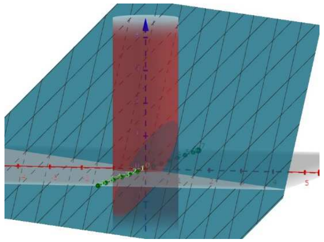
$f(x_1,\cdots,x_N)$ が制約条件の下で極値となるための必要条件

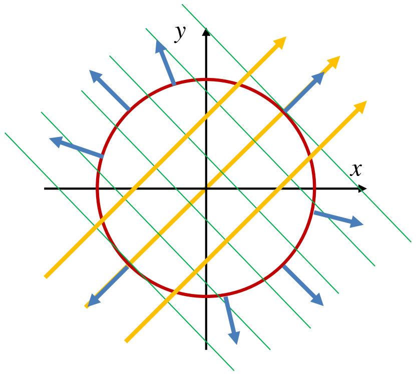
ラグランジュ未定乗数法の例題

問題：次の最適化問題の極値の候補となる点を求めなさい。また，最大値を求めなさい

- **目的関数** $f(x, y) = x + y$
- **制約条件** $x^2 + y^2 = 1$

check!





$f(x,y)$ の等高線

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$f(x,y)$ の等高線の法線ベクトル

$g(x,y)$ の法線ベクトル

演習問題

練習問題

- **財 X と Y の消費量 x, y に関する効用関数を**

$$u(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

とし、財 X と Y の1単位の価格はそれぞれ p_x, p_y，予算は M とする。このとき、効用を最大化する候補となる消費量 x, y を求めなさい。

演習問題

- **次の最適化問題の極値の候補となる点を求めなさい**

目的関数 $f(x, y) = xy$

制約条件 $x + 2y = 5$

補足：複数の制約条件とラグランジュ未定乗数法

目的関数 $f(x_1, \cdots, x_N)$

制約条件 $g_i(x_1, \cdots, x_N) = 0, (i = 1, \cdots, M)$

ラグランジュ関数

$$L = f(x_1, \cdots, x_N) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_i(x_1, \cdots, x_N)$$

制約条件を満たす $f(x_1, \cdots, x_N)$ **が点** $(a_1, \cdots, a_N)$ **で極値をとり，かつ，** $\left[\frac{\partial g(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g(a_1,\cdots,a_N)}{\partial x_N}\right]^T \neq \mathbf{0}$ **ならば**

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_1} =, \cdots, \frac{\partial L}{\partial x_N} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} =, \cdots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_M} = 0$$

- **解が求まる条件：** $N > M$