# 経済経営数学I 補助資料 ～制約無し最適化問題～

2023年度1学期:　　水曜1限
担当教員:　　　　石垣　司



## 極値を利用した最適化問題

**最適化問題の世界は広大**

**本授業は極値を利用した連続最適化問題を扱う**

最適化問題の中では基本的な問題のクラス
大学学部で修得すべき経済学の問題と相性がよい

**これ以降の講義における仮定**

- 関数 $f$ は2階微分(2階全微分)可能
- 極値は変数の定義域の内にある



## 1変数関数の極値

**1階の条件** $f'(a) = 0$

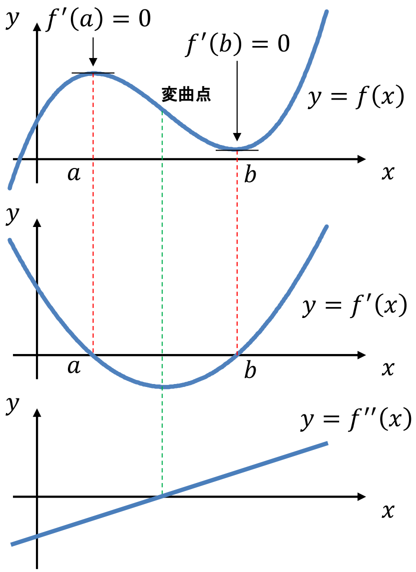
- $f(x)$ は $x = a$ で極値となる
  $\Rightarrow f'(a) = 0$

**2階の条件** $f''(a) < 0, (> 0)$

$f'(a) = 0$ を満たすとき,

- $f''(a) < 0 \Rightarrow$ 点 $a$ で極大
- $f''(a) > 0 \Rightarrow$ 点 $a$ で極小

#メモ　1階の条件は極値となるための必要条件( $f(x) = x^3$ の $x = 0$ などがある)。2階の条件は極大・極小値となるための十分条件の要素( $f(x) = x^4$ の $x = 0$ などの例外がある)。両方ともそれのみでは必要十分条件ではないことに注意。

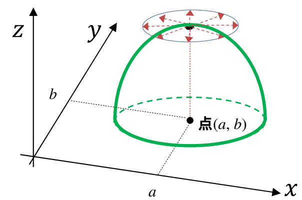





## 2変数関数の極値

**1階の条件**

- $z = f(x, y)$ は点$(a, b)$において極値
  $\Rightarrow \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$




**2階の条件**　$d^2z < 0\ (> 0)$

- 2階の全微分$d^2z$:

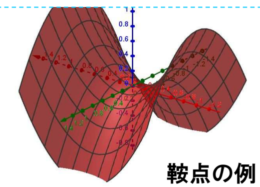
check!

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial xy}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$ を満たすとき

- $d^2z < 0 \Rightarrow$ 点 $(a, b)$ で極大
- $d^2z > 0 \Rightarrow$ 点 $(a, b)$ で極小

#メモ　鞍点の可能性があるため、1階の条件は必要十分条件ではない



鞍点の例
$f(x, y) = x^2 - y^2$

"どの方向"に動かしても $d^2z$ が正or負ということ

# 2次形式と行列の定値性

## 2次形式　$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ (復習)

- $A$ は対称行列。$\boldsymbol{x}$ は任意のベクトル（例：$x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$）

## 行列の定値性

**零ベクトル以外の任意の $x$ について次の条件を満たすとき、対称行列 $A$ を次のように呼ぶ**

- $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$ のとき, 正定値行列　(⇔すべての固有値が正)
- $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0$ のとき, 半正定値行列 (⇔すべての固有値が非負)
- $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \leq 0$ のとき, 半負定値行列 (⇔すべての固有値が非正)
- $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$ のとき, 負定値行列　(⇔すべての固有値が負)

- 対称行列の定値性の(固有値を用いない)判別法(シルベスタの定理)

  正定値行列 ⇔ 首座小行列式がすべて正　check!

  負定値行列 ⇔ 首座小行列式が交互に負, 正と繰り返す



# ヘッセ行列と行列の定値性

## ヘッセ行列

- 多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_N)$ のヘッセ行列

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(x_1, \ldots, x_N) & \cdots & f_{x_1 x_N}(x_1, \ldots, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_N x_1}(x_1, \ldots, x_N) & \cdots & f_{x_N x_N}(x_1, \ldots, x_N \end{bmatrix}$$

## 2階の全微分はヘッセ行列の2次形式で表現可能

$$d^2 z = \boldsymbol{x}^T H \boldsymbol{x}$$

check!



# 多変数関数の極値

## 1階の条件

- $f(x_1, \ldots, x_N)$ が点 $(a_1, \ldots, a_N)$ で極値であるならば,

$$\Rightarrow \frac{\partial f(a_1, \cdots, a_N)}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f(a_1, \cdots, a_N)}{\partial x_N} = 0$$

## 2階の条件 $\boldsymbol{x}^T H \boldsymbol{x} < 0, (> 0)$

$\frac{\partial f(a_1, \cdots, a_N)}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f(a_1, \cdots, a_N)}{\partial x_N} = 0$ を満たすとき,

- ヘッセ行列 $H$ が負定値行列 ⇒ 点 $(a_1, \cdots, a_N)$ で極大
- ヘッセ行列 $H$ が正定値行列 ⇒ 点 $(a_1, \cdots, a_N)$ で極小



# 制約無し最適化問題

**練習問題:** $f(x, y) = x^2 + 2xy + {}^1/_3\, y^3 - 3y$ を考える。

1. 関数 $f(x, y)$ の極値の候補となる点を1階の条件から求めなさい
2. その候補の中から極値をとる点を見つけ, その点で関数 $f(x, y)$ が極大であるのか極小であるのかを示しなさい

## 演習問題

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 3xz + 4y$ を考える。

1. 関数 $f(x, y, z)$ の極値の候補となる点を1階の条件から求めなさい
2. その候補の中から極値をとる点を見つけ, その点で関数 $f(x, y, z)$ が極大であるのか極小であるのかを示しなさい