経済経営数学I 補助資料
～経済学モデルと固有値問題～

2023年度1学期:　　水曜1限
担当教員:　　　　石垣　司

無限数列の発散・収束と固有値問題

$\lim_{n\to\infty} A^n$ の収束

check!

– A は対角化可能ですべての固有値の絶対値が1より小さいとき, $\lim_{n\to\infty} A^n \to O$（$O$ は零行列）となる

#メモ：今までの講義内容でカバーできる行列が収束する条件。行列のノルムを定義することで、より一般的な収束の判定法が導出可能

– 線形変換 $A^n x$ をイメージしてみよう

固有値の絶対値が1より大きい
⇒　線形変換 A を行うごとに, その固有ベクトルの方向へベクトル x の大きさが拡大

固有値の絶対値が1に等しい
⇒　線形変換 A を行っても, その固有ベクトルの方向でベクトル x の大きさは不変

固有値の絶対値が1より小さい
⇒　線形変換 A を行うごとに, その固有ベクトルの方向へベクトル x の大きさが縮小

産業連関分析と行列～数理モデル

産業連関分析モデル

– ある一国の経済を考える。ある財 i の総生産 x_i $(i = 1,\ldots,M)$ は複数の中間財需要と最終需要 b_i の合計である。

中間財：乗用車の生産 ← 電力 + めっき鋼材 + 電子機器…
最終需要：消費者、投資家、政府などによる需要

– このとき、総生産 x_i を次でモデル化する

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iM}x_M + b_i$$

ただし、a_{ij} は財 i の生産に必要な財 j の投入係数

– $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_M]^T, \boldsymbol{b} = [b_1, \ldots, b_M]^T$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}$とすると総生産ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表現できる

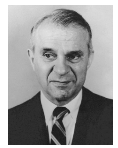
産業連関分析と行列～産業連関表

産業連関表

– 国の経済を産業単位に分割し、その産業間の中間取り引きを表現した表

簡単な産業連関表の例

		中間需要		最終需要	国内総生産
		産業a	産業b		
中間投入	産業a	40	50	10	100
	産業b	20	150	80	250
付加価値		40	50		
国内総生産		100	250		



Wassily Leontief 1905 – 1999
1973年ノーベル経済学賞

縦方向：何をどれだけ使って生産したか？
1. 産業aは全体で100を生産
2. 産業aが産業a自身の生産物を40需要
3. 産業aが産業bの生産物を20需要
4. 付加価値40を生み出している

横方向：どこへどれだけ販売したか？
1. 産業aが産業a自身に40販売
2. 産業aが産業bに生産物を50販売
3. 最終需要（家計など）へ10販売
4. 全体で100販売

産業連関分析と行列～行列表現

産業連関表の投入係数行列の作り方

	投入係数行列（A）		最終需要（$\boldsymbol{b}$）	総生産（$\boldsymbol{x}$）
産業a	$a_{11}=\frac{40}{100}=0.4$	$a_{12}=\frac{50}{250}=0.2$	$b_1=10$	$x_1=100$
産業b	$a_{21}=\frac{20}{100}=0.2$	$a_{22}=\frac{150}{250}=0.6$	$b_2=80$	$x_2=250$
総生産	100	250		

産業連関表の行列表現

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\250\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\250\end{bmatrix}$$

産業連関分析と行列～波及効果

レオンチェフ逆行列 $(I-A)^{-1}$

- 最終需要ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられた時、それを満たすための総生産ベクトル

$$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\boldsymbol{b}$$

投入係数はその時のその国の技術条件等で決まると考える

産業全体の波及効果を表現

- 例：$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\begin{bmatrix}10\\80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\250\end{bmatrix}$
- 例：$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\begin{bmatrix}10+5\\80+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}110\\255\end{bmatrix}$
- 例：$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\begin{bmatrix}10+5\\80-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}105\\240\end{bmatrix}$

波及効果の発散・収束

産業連関分析の波及効果

- 総生産ベクトル x, 最終需要ベクトル b, 投入係数行列 A とすると, それらの関係は $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ とモデル化できる。
- 各産業間への波及効果の数理モデル

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{b}+A^2\boldsymbol{b}+A^3\boldsymbol{b}+\cdots$$

マクロ経済学の乗数効果と同様の算出。ただし、概念は異なる。（経済経営数学基礎：「数列と極限」の回を参照）

- 問題：レオンチェフ逆行列 $(I-A)^{-1}$ が存在し, A は対角化可能ですべての固有値の絶対値が1より小さいとする。このとき, 次の関係式が波及効果を表現していることを示しなさい

$$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\boldsymbol{b}$$

#メモ　行列 A がホーキンス-サイモンの条件を満たすとき、問題文中の条件が成り立つ。
ホーキンス-サイモンの条件は経済的に合理的な設定であれば満たされる

非負正方行列と固有値

確率行列

- 行列内の縦ベクトルが確率

例：$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.2 & 0.6\end{bmatrix}$, $a_{11}+a_{21}=1$ かつ $a_{12}+a_{22}=1$

必然的に行列の要素はすべて0以上

（マルコフ連鎖の）遷移行列

確率行列の固有値は次の性質をもつ

- 確率行列は, $\lambda=1$ となる固有値を1つ以上もつ check!
- それ以外の固有値の絶対値は1より小さい

#メモ　この条件はペロン-フロベニウスの定理の特殊な例。
その定理では非負正方行列のより一般的な性質を導出可能

人口動態の分析と固有値問題

将来の都市人口の予測

- 現在, 都市 S には300万人(S_0)が, 都市 T には300万人(T_0)が住んでいる。この2つの都市の間では人口の流入出があり, それ以外の都市からの人口流入出はないものとする。今, 各都市の住人が1年間で流出する確率を次とする。

  都市 S の住民 → 都市 T : 0.1

  都市 T の住民 → 都市 S : 0.2

問題:

- n 年後の各都市の人口 S_n と T_n を予測する数理モデルを S_0 と T_0 を用いて行列とベクトルで表しなさい。
- 流出確率と出生・死亡のバランスが変わらないと仮定したとき, $n \to \infty$ のときの各都市の人口を答えなさい。