経済経営数学I 補助資料 ～線形代数の復習4～ （固有値と固有ベクトル）

2023年度1学期:　　水曜1限

担当教員:　　石垣　司

固有値と固有ベクトルによる対角化

変換行列 P と対角行列 D の対角成分を求める

- 標準基底における線形変換 A はどのような変換であるのかを，別の基底を用いて簡潔に説明する

#メモ　前回は、与えられた基底と線形変換に対して対角化できる例を扱っていた。ここでは、線形変換の表現行列 A から対角化のための変換行列 P（基底）を見つけ出す

固有値問題 check!

- $N \times N$の正方行列 A に対して，方向を変化させないベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N\}$ とスカラーの組 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$
$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$
を求める問題
- λ_i を A の固有値，$\boldsymbol{p}_i$ を λ_i に対する固有ベクトルと呼ぶ
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N\}$ とスカラーの組 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$を用いて、線形変換 A の対角化が可能

固有値と固有ベクトルの計算法

固有方程式

$$|A - \lambda I| = \boldsymbol{0}$$ check!

- の解 $\lambda(\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ は固有値となる

- 固有値が求まれば、それに対応する固有ベクトルも求まる
- 対角化：$[\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_N]^{-1} A [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_N] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_N \end{bmatrix}$

　固有値が重解の場合は対角化できない

問題：次の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい

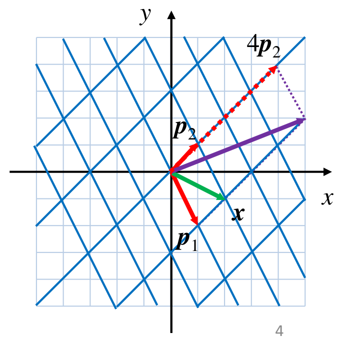
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

固有値分解による対角化の解釈

例：標準基底での線形変換 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ は，ベクトル $\boldsymbol{x} = [2 \ \ -1]$ をどのような変換するか？

- 標準基底での表現 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- 固有ベクトルの組の行列 P を基底とした表現
$$P^{-1}AP \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

標準基底での線形変換 A はベクトル x を
固有ベクトル$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}$ の方向へ1倍
固有ベクトル$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}$ の方向へ4倍
する変換を施す



正方行列のランクのまとめ

$N \times N$ の正方行列 A が $\mathrm{rank}(A) = N$ならば,

- $\Leftrightarrow$ A 内のベクトルの組は線形独立
- $\Leftrightarrow$ A 内のベクトルの組は N 次元空間を張る
- $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$
- $\Leftrightarrow$ 逆行列が存在する
- $\Leftrightarrow$ 固有値がゼロにはならない

$N \times N$ の正方行列 A が $\mathrm{rank}(A) < N$ ならば,

- $\Leftrightarrow$ A 内のベクトルの組は線形従属
- $\Leftrightarrow$ A 内のベクトルの組は N 次元空間を張ることができない
- $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$
- $\Leftrightarrow$ 逆行列が存在しない
- $\Leftrightarrow$ ゼロとなる固有値がある

演習問題

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$