経済経営数学I 補助資料 ～線形代数の復習3～ (対角化)

2023年度1学期:　　水曜1限
担当教員:　　　　石垣　司

対角化とは？

正方行列 A に対して, ある正則な正方行列 P を用いて, $P^{-1}AP = D$ (D は対角行列)へ変換すること

– A: 対角化可能な行列, P: 変換行列

1. 次の A と P が与えられたとき、$P^{-1}AP$ を求めなさい

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A^6 を求めなさい
   – ヒント1: $P^{-1}AP = D$ の両辺を2乗, 3乗してみよう
   – ヒント2: べき乗に関する法則性を見つけ出してみよう

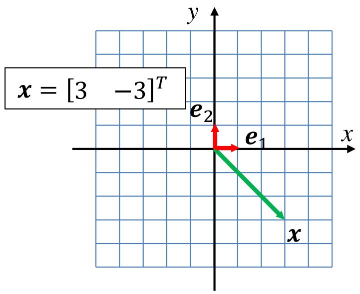
基底の変換

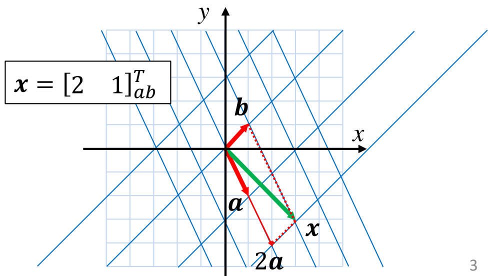
同じベクトル x の異なる基底での表現

※　以降は 2×2の行列を説明に用いる。標準基底に関する基底変換を考える。

– 例: 基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, $\boldsymbol{a} = [1 \quad -2]^T, \boldsymbol{b} = [1 \quad 1]^T$
　標準基底のベクトル(座標): $\boldsymbol{x} = [3 \quad -3]^T$
　基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ でのベクトル(座標): $\boldsymbol{x} = [2 \quad 1]_{ab}^T$

– 同じベクトルでも基底毎に別の表現
　$[3 \quad -3]^T$ と $[2 \quad 1]_{ab}^T$ の関係を線形変換で対応させる





基底の変換行列

N 次元ベクトル空間の2つの基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N\}$ と $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_N\}$ が存在し,

$$[\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_N] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N]P$$

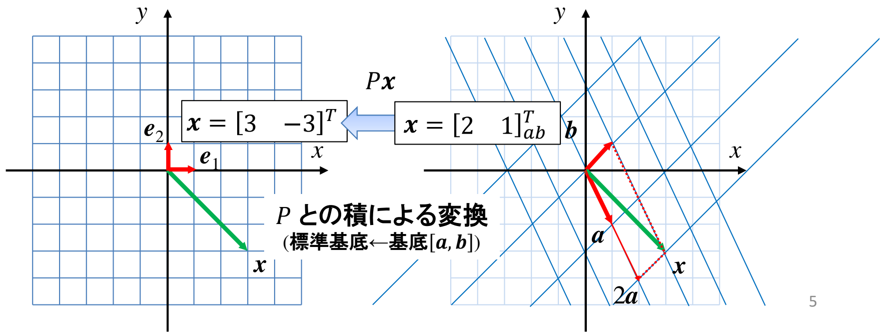
となるとき, 正方行列 P を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N\}$ から基底 $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_N\}$ への基底の変換行列とよぶ

– 例: $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ならば, 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ への基底の変換行列は $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ となる。
また, 基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ から標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ への基底の変換行列は P^{-1} となる

基底の変換行列 P ×ベクトル x の解釈

ベクトル x を基底 $\{a, b\}$ から標準基底での表現へ変換

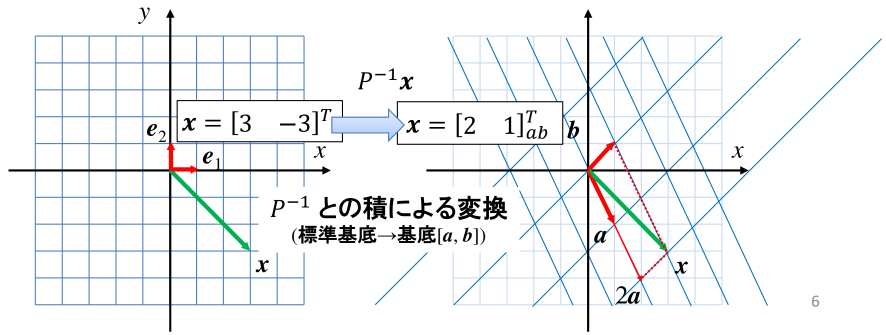
- 標準基底から基底 $\{a, b\}$ への変換行列 P と x の積は,基底 $\{a, b\}$ での x の表現を標準基底での表現へ, ベクトルの長さや向きは変化させずに表現のみを変換する
- 例: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{ab}$ のとき $P\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{ab} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$



基底の変換行列 P^{-1} ×ベクトル x の解釈

ベクトル x を標準基底から基底 $\{a, b\}$ での表現へ変換

- 基底 $\{a, b\}$ から標準基底への変換行列 P^{-1} と x の積は, 標準基底での x の表現を基底 $\{a, b\}$ での表現へ, ベクトルの長さや向きは変化させずに表現のみを変換する
- 例: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ のとき $P^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{ab}$



$P^{-1}AP$ の解釈

基底 $\{a, b\}$ における, 標準基底での線形変換 A の表現行列

$\boldsymbol{a} = [1 \quad -2]^T$

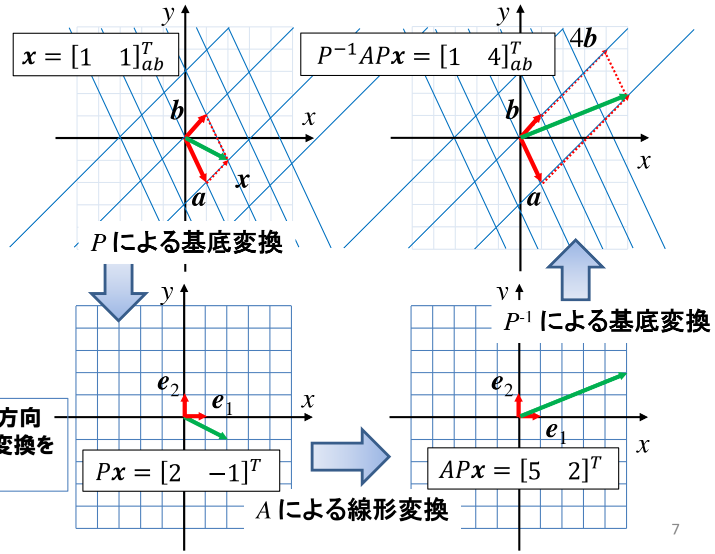
$\boldsymbol{b} = [1 \quad 1]^T$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$



行列 A はベクトル x を a の方向へ1倍, b の方向へ4倍する変換を行う行列

演習問題

1. $\boldsymbol{a} = [1 \quad -4]^T, \boldsymbol{b} = [1 \quad 1]^T$とし, 基底 $\{a, b\}$ を考える。基底 $\{a, b\}$ において $\boldsymbol{x} = [1 \quad 2]^T_{ab}$ と表現されるベクトルを標準基底での表現へ変換する線形変換 P を示しなさい。
2. 標準基底における線形写像の表現行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ を考える。問題1の P 用いて$P^{-1}AP$ を求めなさい。
3. この線形変換 A はベクトル x をどのように変換するかを説明しなさい。