経済経営数学I 補助資料 ～線形代数の復習2～ （線形空間、基底、線形変換）

2023年度1学期：　　水曜1限
担当教員：　　　　　石垣　司

線形空間とは？

集合 V の任意の元 a, b, cに対して和とスカラー倍が
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ ならば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$
- $\boldsymbol{a} \in V$ ならば、実数 k に対して $k\boldsymbol{a} \in V$

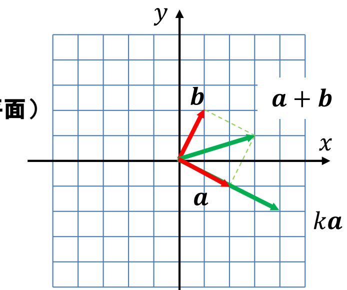
と定義され、次の性質を満たすとき, V を線形空間と呼ぶ
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
- $\boldsymbol{0} \in V, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a})$
- $\boldsymbol{x} \in V, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0})$
- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
- $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$
- $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$
- $(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$

#メモ
線形空間は抽象的な概念ですが、具体例を考えることでイメージしやすいです。また、本講義の範囲内では、"線形空間＝M 次元ベクトルの集合"と考えても問題ありません。
しかし、実際はM 次元ベクトルの集合以外の様々な線形空間を考えることができます。

線形空間の例

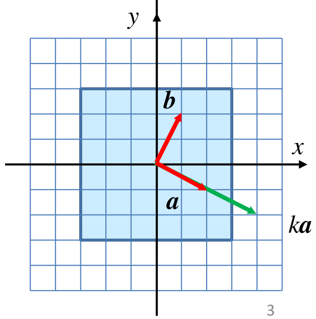
N 次元ベクトルの集合は線形空間
- 例：V = "2次元ベクトルの集合"（$x-y$平面）

$\boldsymbol{a} = [2 \quad -1]^T, \boldsymbol{a} = [1 \quad 2]^T, k = 2$
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = [3 \quad 1]^T \in V$
$k\boldsymbol{a} = [4 \quad -2]^T \in V$



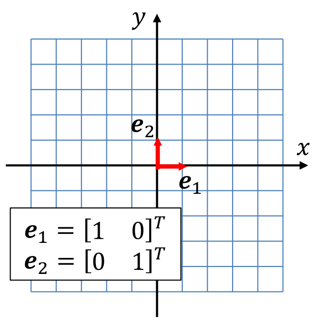
線形空間ではない空間の例
- 例：V = "範囲を限定した 2次元ベクトルの集合"

$\boldsymbol{a} = [2 \quad -1]^T, \boldsymbol{a} = [1 \quad 2]^T, k = 2$
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$
$k\boldsymbol{a} = [4 \quad -2]^T \notin V$

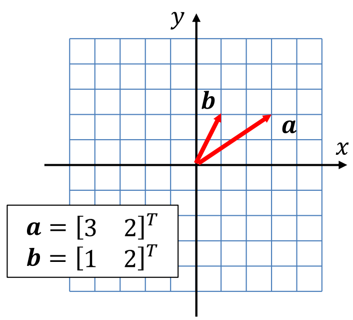


基底とは？

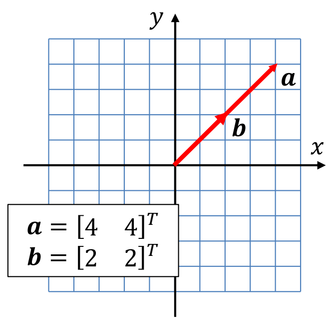
2次元ベクトル集合（x-y 平面）**の例**
- $x-y$ 平面（線形空間 V ）の元であるベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して, $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$（$k, l$ は実数）を線形結合とよぶ。x-y 平面のすべての座標点をその線形結合で作り出すことができるベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を基底という



正規直交基底$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$



基底$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$



基底ではない$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$

線形独立と線形従属

線形空間 V の元 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ と実数 $k_1, k_2, \cdots, k_N$ を考える。線形結合 $k_1\boldsymbol{a}_1 +, \cdots, +k_N\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{0}$ に対して,

$k_1 = k_2 =, \cdots, = k_N = 0$ のときのみ上式が成立するとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ は線形独立(一次独立)という

$k_1, k_2, \cdots, k_N$ のうち, 少なくとも一つが 0 でないものがあるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ は線形従属(一次従属)という

- **$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N$ のうちの元のどれか一つは他の元の線形結合で表すことができる**
  $\Rightarrow$ 基底となることができない

線形独立と行列のランク

ベクトルの組 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が線形独立とはどういうとき？

$\boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2]^T, \boldsymbol{b} = [b_1 \quad b_2]^T$ **で正方行列 $A = [\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}]$ を考える**

- **正方行列 A 内の各ベクトルが線形独立**
  $\Leftrightarrow$ 正方行列 A のランクが行列の列数と同じ
  $\because \mathrm{rank}(A) = M \Leftrightarrow A^{-1}$ **が存在する**
  $\boldsymbol{k} = [k_1, \ldots, k_M]^T$ **とし、$A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \Rightarrow A^{-1}A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$. よって、$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$**

問題：次のベクトルの組は線形独立であるか？

- $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

基底の定義

線形空間 V の元 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ が線形独立であり, かつ, V の任意の点をその線形結合で表すことができるとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_N\}$ を基底と呼ぶ

N 次元ベクトル空間の基底

- **基底となるベクトルの組の線形結合で, N 次元ベクトル空間のすべての座標を表現できる**
- **基底とならないベクトルの組の線形結合では, 表現できない N 次元ベクトル空間内の座標がある**

例：$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の線形結合では,
3次元空間(x, y, z 軸)の中のある2次元平面(x-y平面)の座標しか作り出せない

練習問題

次のベクトルの組は線形独立であるか線形従属であるかをそれぞれ示しなさい。また、3次元ベクトル空間における基底と成り得るかも示しなさい。

- ① $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ② $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- ③ $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

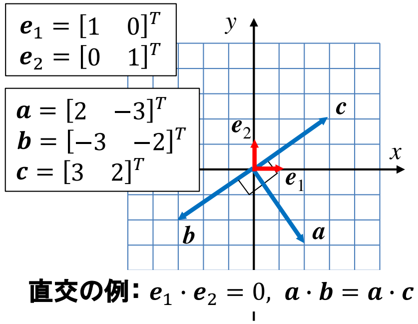
内積と正射影

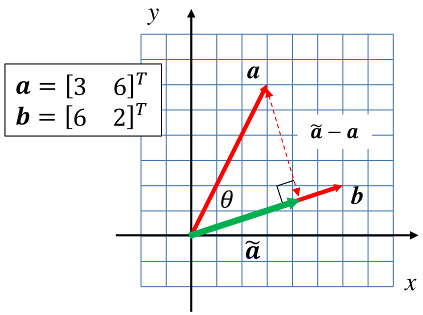
定義：2つの N 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角が θ のとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N$$

内積の性質

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は直交する
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b}$（$\tilde{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ 上への正射影ベクトル）





直交の例： $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0,\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$

線形代数を学習する意義の整理

大学数学初級で扱う行列の主な内容

1. **行列計算の基礎**
   - 経済学・経営学で扱う数理モデルの表記
   - 和と積, ランク, 逆行列, 行列式, 内積と直交
2. **連立方程式の係数と考える**
   - 掃き出し法, ランクと解の種類
3. **線形空間内のベクトルの組と考える**
   - 基底, 線形独立・線形従属, 部分空間
4. **ベクトルを変換する関数として考える**
   - 線形写像と線形変換, ベクトルの回転, 座標の取り換え, 対角化, 固有値と固有ベクトル

線形写像とは？

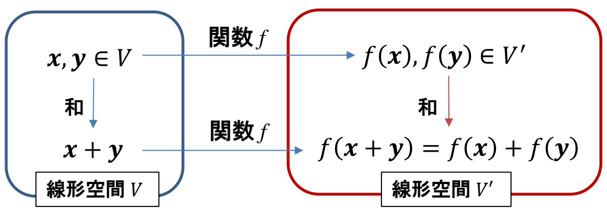
線形空間 V と V' を考える。V から V' への写像 $f: V \to V'$ が, 任意の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と実数 k に対して, 次の2つの性質を満たすとき, f を V から V' への線形写像と呼ぶ

- $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
- $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

#メモ これ以降の抽象論は一切省略。興味のある学生は、核、商空間、準同型定理などを勉強しましょう。

- **線形写像 f は, 入力・出力ともにベクトルとなる関数**

線形写像の成り立つ世界



線形写像と表現行列

N 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を M 次元ベクトルへ写す線形写像 f に対して, $M \times N$ の行列 A がただ一つに定まるとき, 行列 A を f の表現行列と呼ぶ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

例：

- $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$
- $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$
- **表現行列** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

線形変換とは？

V と V' を N 次元ベクトル空間とした線形写像

本講義で扱う線形変換 ⇒ 行列×ベクトル

– 例：線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix},\ \text{表現行列}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

– 線形変換の表現行列 A は必然的に $N \times N$ の行列

– 例：2次元ベクトル空間における回転の表現行列

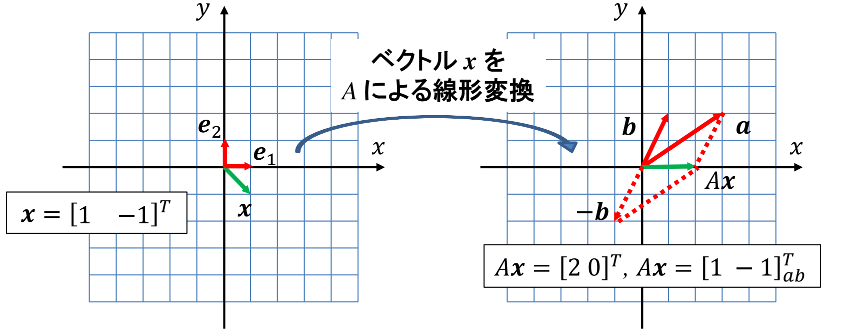
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{check!}$$

2次元ベクトル空間のベクトル x をノルムを変えずに原点を中心に半時計周りに θ 回転させる線形変換 f の表現行列

線形変換の解釈

線形変換 f の表現行列が与えられたとき、
その f はどのような変換とみなせるのか？

– 例：$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$



標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$における座標(1, -1) を
新基底 $\boldsymbol{a} = [3,2]^T$, $\boldsymbol{b} = [1,2]^T$ での座標 $(1, \text{-}1)_{ab}$へ変換する操作

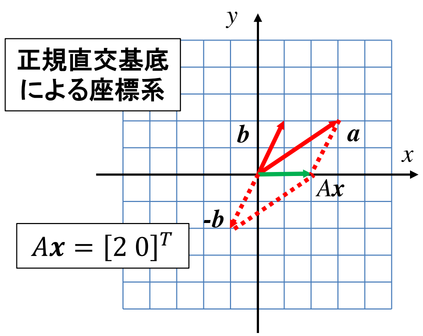
斜交座標系への変換

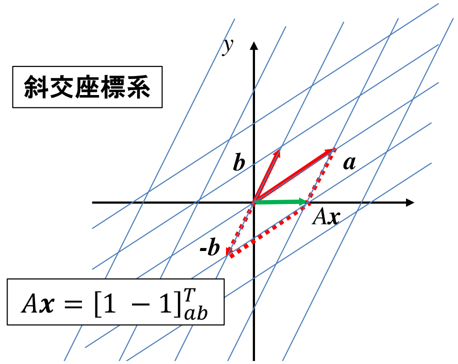
2次元の場合の線形変換の解釈

– 標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ における座標 (x, y) を基底 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ での座標 $(x, y)_{ab}$ へ変換する操作

– $(a, b)_{ab}$：基底 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ での座標の表示方法

一般の場合：旧基底$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$における座標$(x, y)_{xy}$ を新基底$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$での座標$(a, b)_{ab}$へ変換する操作





演習問題

1. ある銀行の金利は r で、預金額 $x \in \mathbb{R}$ と1年後の残高との関係は $f(x) = x(1 + r)$ とする。この f は線形写像であるかどうかを確かめよ。

   ※数学の問題とは関係ないが、x が負の時は借入と考える

2. 金利は預金額 $x \in \mathbb{R}$ によって変化し、その関係は $f(x) = x(1 + rx)$ となる場合、この f は線形写像であるかどうかを確かめよ。