# 経済経営数学I 補助資料
# ～線形代数の復習1～
# (行列の書き方, 逆行列, ランク)

2023年度1学期:　水曜1限
担当教員:　石垣　司



# 本授業でのベクトルと行列の表記法

**スカラー**（ベクトルや行列ではない実数）
- 小文字で表記：$a, b, c$ 等

**ベクトル**
- 小文字の太字で表記: $\boldsymbol{a} = [a_1 \quad \cdots \quad a_M]^T$ （$M$:次元）
  ベクトルは縦に長い

**行列**( Matrix )
- 大文字で表記: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MP} \end{bmatrix}$ ( $M \times P$ 行列 )
  各 $a_{ij}$ は行列の成分・要素
- その他, 和, 積, 単位行列, 転置行列, 行列式などを要復習



# スカラー、ベクトル、行列の集合

**実数を要素とするスカラー・ベクトル・行列の集合**
- $\mathbb{R}$ :実数の集合
- $\mathbb{R}^M$ :要素が実数の $M$ 次元ベクトルの集合
- $\mathbb{R}^{M \times P}$ :要素が実数の $M \times P$ 行列の集合

**実数を要素とするスカラー・ベクトル・行列**
- $a \in \mathbb{R}$ :実数 $a$
- $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^M$ :要素が実数の $M$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$
- $A \in \mathbb{R}^{M \times P}$:要素が実数の $M \times P$ 行列 $A$



# 1次形式のベクトルによる表現

**1次形式**（変数の1次の項“のみ”からなる多項式）
- $x_1, \dots, x_M$:　$M$ 個の変数
- $a_1, \dots, a_M$:　$M$ 個の係数

$$f_1(x_1, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^{M} a_i x_i = a_1 x_1 +, \dots, + a_M x_M$$

例: $f_1(x, y, z) = ax + by + cz$

**1次多項式のベクトルによる表現**
- $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \dots \ x_M]^T, \boldsymbol{a} = [a_1 \dots a_M]^T$

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}$$

# 2次形式の行列による表現

**2次形式**（変数の2次の項“のみ”からなる多項式）

- $x_1, \dots, x_M$： $M$ 個の変数
- $a_{11}, \dots, a_{MM}$： $M \times M$ 個の係数

$$f_2(x_1, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_i x_j$$
$$= a_{11}x_1^2 +, \dots, + a_{MM}x_M^2 +, \dots, +2a_{12}x_1x_2 +, \dots, +2a_{(M-1)M}x_{M-1}x_M$$

**例**：$f_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

**2次形式の行列による表現**

- $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \dots \ x_M]^T$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}$

$$f_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$



# 対称行列と2次形式

**対称行列**

- $A = A^T$ を満たす正方行列

**例**：$A = \begin{bmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{bmatrix}$

**特に**, $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ **のとき実対象行列とよぶ**

**2次形式（$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$）中の行列 $A$ と対称行列**

- 行列 $A$ を実対称行列とすると任意の2次形式 $f$ は $f = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ と表現できる。
- また, その実対称行列 $A$ はただ1つに定まる



# ベクトルの微分

**ベクトルをスカラーで微分**

- $\boldsymbol{v} = [f(x) \ g(x) \ \dots \ h(x)]^T$ のとき $\frac{d\boldsymbol{v}}{dx} = \left[\frac{df(x)}{dx} \ \frac{dg(x)}{dx} \ \cdots \ \frac{dh(x)}{dx}\right]^T$
- 問題： $\boldsymbol{v} = [x \ x^2 \ x^3]^T$ のとき、$\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}$ を求めなさい

**多変数関数をベクトルで微分**

- $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$ のとき $\frac{df(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_M}\right]^T$
- 問題：$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3^2$ のとき $\frac{df(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}$ を求めなさい

**公式**：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$ **のとき** $\frac{df(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$

**公式**：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ **のとき** $\frac{df(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x}$



# 逆行列

**正方行列 $A$ と単位行列 $I$ に対して、**
**$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列$A^{-1}$を逆行列とよぶ**

- **例**： $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**問題**：

- 上の例で$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$となることを確かめよ
- 上の例で$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$となることを確かめよ

# 逆行列の性質

**正方行列 $A$ と $B$ に逆行列が存在するとき、以下の性質を満たす**

**性質1：逆行列が存在する場合は一意に定まる** check!

**性質2：** $(A^{-1})^{-1} = A$ check!

**性質3：** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ check!



# 掃き出し法

**掃き出し法の手順**

– 行基本変形を繰り返し、拡大係数行列の左部分を単位行列 $I$ に変形

**行基本変形**

1. 行と行を入れ替える
2. 1つの行を $k$ 倍する
3. 1つの行の $k$ 倍を他の行に加える



# 掃き出し法の仕組み #1

**行基本変形1**（行と行を入れ替える）**を行う行列**

– 単位行列 $I$ の入れ替えたい行同士を交換した行列

– 例：行列 $A$ の2行目と3行目を入れ替えたい：$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow CA$

**行基本変形2**（行を $k$ 倍する）**を行う行列**

– 単位行列 $I$ の $k$ 倍したい行を $k$ 倍した行列

– 例：行列 $A$ の2行目を $k$ 倍したい：$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow CA$

**行基本変形3**（$k$ 倍した行を他の行に加える）**を行う行列**

– 単位行列 $I$ の $k$ 倍したい行と加えたい列に $k$ を代入した行列

– 例：行列 $A$ の3行目を $k$ 倍し1行目に加えたい：$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow CA$



# 掃き出し法と逆行列

**問題：次の行列の逆行列を掃き出し法で求めなさい**

– $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

**掃き出し法で逆行列が求まる仕組み**

– $C_j$：$j$ 回目に行う行基本変形を表す行列

$$\underbrace{C_J, \dots, C_2 C_1}_{A^{-1}} A = I$$

$$C_J, \dots, C_2 C_1 I = A^{-1}$$

# 行列式と逆行列

## $2\times 2$ の行列の逆行列の公式

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

## $N\times N$ の行列の逆行列の公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{-11} & A_{-12} & \cdots & A_{-1N} \\ A_{-21} & A_{-22} & \cdots & A_{-2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{-N1} & A_{-N2} & \cdots & A_{-N1} \end{bmatrix}^T$$

- 各 $A_{-ij}$ は余因子だが，ここでは復習しない



# 行列のランク（階数）

## 行列 $A$ のランク（階数）：$\mathrm{rank}(A)$

- $M\times P$ の行列 $A$ に行基本変形を行い階段行列にしたとき、一つ以上の成分がゼロではない行の数
  - ランクには様々な深い意味がある

## 問題：次の行列のランクを求めなさい

- $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$



# 連立一次方程式と行列のランク

**$M$ 個の未知数をもつ連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が非自明なただ一つの解をもつための必要十分条件**

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}])=M$$

- 例：$\mathrm{rank}(A)<\mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}])$ のとき
  $[A|\boldsymbol{b}]$の行基本変形後の階段行列 $(\mathrm{rank}(A)=2, \mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}])=3)$

  $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$，3行目で $0=3$ と矛盾 $\Rightarrow$ 解無し

- 例：$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}])<M$（$M$：変数の数）のとき
  $[A|\boldsymbol{b}]$の行基本変形後の階段行列 $(\mathrm{rank}(A)=1, \mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}])=1, M=3)$

  $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，$x+y+z=1 \Rightarrow$ 不定解（無限の解をもつ）



# 逆行列とランク

**正方行列 $A\in\mathbb{R}^{M\times M}$ に逆行列が存在するための必要十分条件**

$$\mathrm{rank}(A)=M$$

## 問題：次の行列に逆行列が存在するか答えなさい

- $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$