経済経営数学I 補助資料 ～微積分の復習2～ (偏微分, 全微分)

2023年度1学期:　　水曜1限

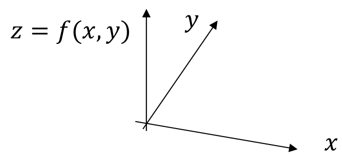
担当教員:　　　　石垣　司

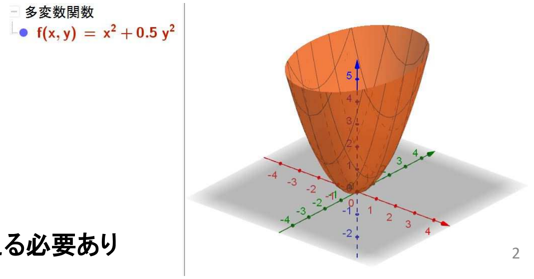
多変数関数

多変数関数: 2つ以上の変数に依存する関数

2変数関数 $f(x,y)$: 2変数 x, y に依存する関数

- 当面は2変数で話を続ける
- 経済学では2つ以上の財や変数などに関する弾力性, 生産関数, 限界効果, 効用関数など数理モデルを扱う





2変数の場合, グラフは3次元で考える必要あり

偏導関数(偏微分)

偏導関数

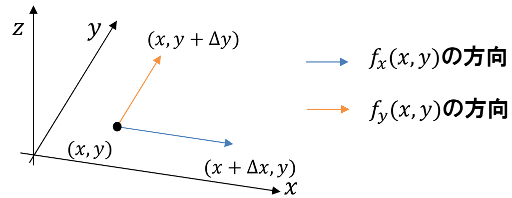
- 多変数関数において, ある変数以外の変数を固定して, その変数に関して求めた導関数

2変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数は2通り

1. 変数 y を固定して変数 x に関する微分をする
   書き方 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f_x(x,y)$
   定義: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$
2. 変数 x を固定して変数 y に関する微分をする
   書き方 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $f_y(x,y)$
   定義: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

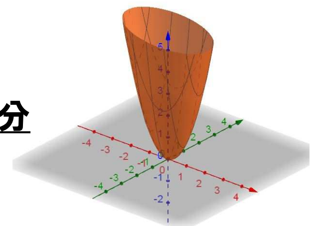
偏導関数の計算方法

$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ の方向



偏導関数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ の計算方法

- <u>変数 y は定数とみなして x に関して微分</u>



例題

- 関数 $f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$ を x に関して偏微分しなさい
- 関数 $f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$ を y に関して偏微分しなさい

合成関数の偏微分

合成関数の偏微分の公式

$$\frac{\partial f\{g(x,y)\}}{\partial x} = f'\{g(x)\}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

– $w = g(x,y), z = f(w)$ **とすると**

$$\frac{\partial f\{g(x,y)\}}{\partial x} = \frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}$$

関数 $h(x,y) = (x + xy + 2y)^2$ **の** $h_x(x,y)$ **を求めよ**

関数 $h(x,y) = (2x^4y^2 + 3x + 2)^6$ **の** $h_x(x,y)$ **を求めよ**

積と商の偏微分

積の偏微分の公式

$$\frac{\partial f(x,y)g(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)g(x,y) + f(x,y)g_x(x,y)$$

商の偏微分の公式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right\} = \frac{f_x(x,y)g(x,y) - f(x,y)g_x(x,y)}{g(x,y)^2}$$

関数 $h(x,y) = (x^2 + y)(x + xy + 2)$ **の** $h_x(x,y)$ **を求めよ**

関数 $h(x,y) = (x^2 + y^2)(x^5 + x^3y^3 + y^2)$ **の** $h_x(x,y)$ **を求めよ**

高次の偏導関数

x **に関する2階偏導関数**

– **書き方：** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, f_{xx}(x,y)$

x **に関する偏導関数の** y **に関する偏導関数**

– **書き方：** $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, f_{xy}(x,y)$

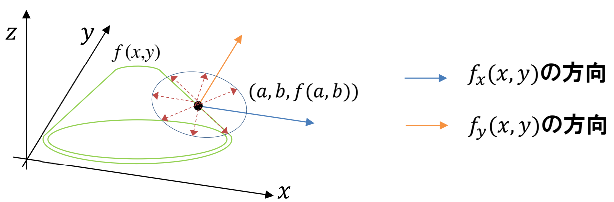
問題：関数 $f(x,y) = x^3 + 2x^2y^3 + 5xy^2 + 3y$ **を考える。2階の偏導関数** $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y)$**をそれぞれ求めなさい**

ヤングの定理, シュワルツの定理

$f_{xy}(x,y)$ **と** $f_{yx}(x,y)$ **が連続の時,** $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

全微分可能性

全微分可能：2変数関数 $z = f(x,y)$ **の点**(a,b)**において, その周囲の全方向で微分可能であること**



偏微分$f_x(x,y), f_y(x,y)$ **は** x **軸と** y **軸の方向のみ**

※ 全微分可能の数学的定義は講義の性質から割愛

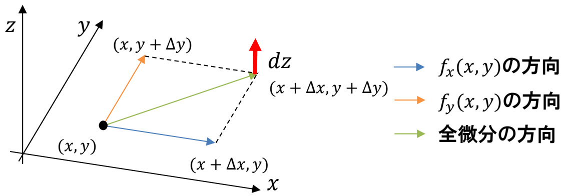
全微分可能であるならば, 点 $(a,b,f(a,b))$ **において接平面が存在**

全微分

2変数関数 $f(x,y)$ の全微分とは, x と y を共に微小変化させたときの $f(x,y)$ の変化分
※偏微分は1つの変数以外の変数を固定した微分

2変数関数 $z=f(x,y)$ の全微分
$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

check!



例題：2変数関数 $z=x^3+xy+y^2$ の $\frac{dz}{dx}$ を求めよ

無差別曲線と全微分

問題：2つの財 X と Y の数量 x と y に関する効用関数 $z=xy$ を考える。数量 x と y の組み合わせが同一の無差別効用曲線上にある条件を求めよ。

– ヒント：同一の無差別効用曲線上にあるということは, その曲線上を移動しても効用の増分はゼロ

また, 上の条件で, 財 X の価格が1, 財 Y の価格が2, 予算が8のとき, 効用が最大となる x と y を求めよ。

– ヒント：予算制約を満たす無差別効用曲線上の点