経済経営数学I 補助資料
～微積分の復習1～
（高次の導関数, テイラー展開）

2023年度1学期:　　水曜1限
担当教員:　　　　石垣　司

最適化と極値

最適化とは？

- 関数の値が最大や最小となる変数の値 x^* を求めること
- 経済学, 経営学, 統計学で扱う数理モデルで頻出
  例: 利潤の最大化, 効用の最大化, 費用の最小化, 分散の最小化

例えば, 多変数の場合や関数の形が自明ではないとき, 最適化は難しくなっていく

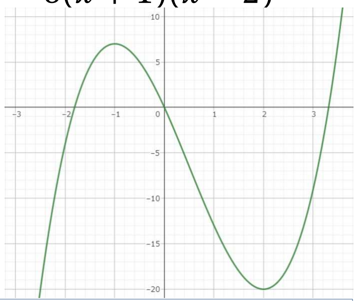
以降の授業では主に凸関数を扱う

関数の増減（高校の復習）

例: 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$ の増減表を作れ

- 解答例: $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

x	…	-1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-20	↗



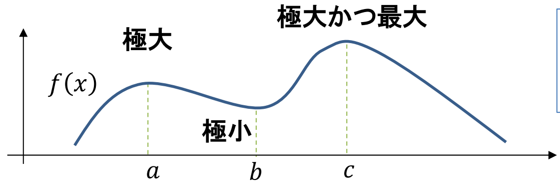
関数の増減

- $f'(a)>0$ ならば,関数 $f(x)$ は $x=a$ の付近で単調増加
- $f'(a)<0$ ならば,関数 $f(x)$ は $x=a$ の付近で単調減少
- $f'(a)=0$ ならば,関数 $f(x)$ は $x=a$ の付近で極値

極値

最大(最小)と極大(極小)

- 最大(小): 関数 $f(x)$ が $-\infty<x<\infty$ で最大(小)
- 極大(小): 関数 $f(x)$ が $x=a$ の周りで最大(小)
  関数 $f(x)$ が微分可能なとき、
  最大, 最小, 極大, 極小における関数の微分係数はゼロ



$f'(a)=0$
$f'(b)=0$
$f'(c)=0$

問題

- 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x\ (-2\le x\le 4)$ が極値をとる x の値を求めよ。また, $f(x)$ の最大値を求めよ。

高次の導関数と関数の増減

n 階の導関数

- 関数 f を n 回微分した導関数
- 書き方：$f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$,（ 2階の導関数　$f''(x)$ ）
- 例題：関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ を3階微分しなさい

2階の導関数が正のとき

- $f''(x) > 0$ なら x の増加につれて $f'(x)$ の値も単調増加

2階の導関数が負のとき

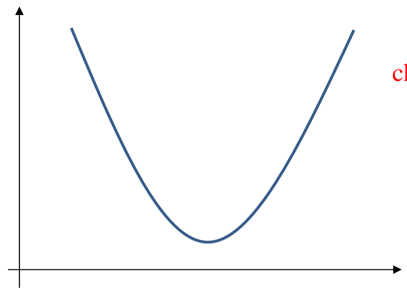
- $f''(x) < 0$　なら x の増加につれて $f'(x)$ の値が単調減少
- 例：$f(x) = x^2$ と $f(x) = -x^2$ を考えてみるとよい

凸関数 #1

定義

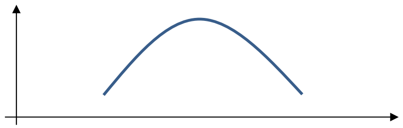
- 関数 f が区間内の任意の2点 x_1, x_2 と $0 < t < 1$ を満たす任意の t に対して, 常に次の関係を満たすとき, 関数 f を凸関数とよぶ

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

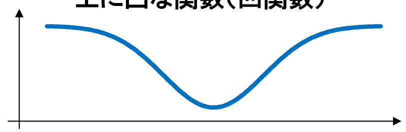


下に凸な関数（凸関数）

check!



上に凸な関数（凹関数）

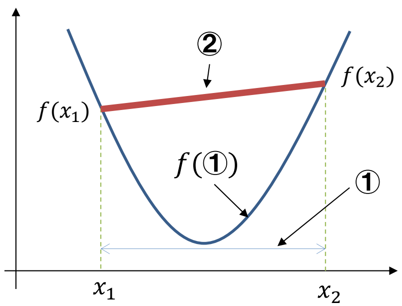


一見、凸関数に見えるが非凸関数の例

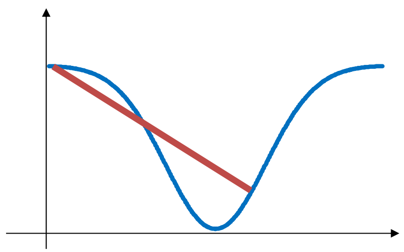
凸関数 #2

凸関数の定義の意味（ $x_1 < x_2$ となる2点 x_1, x_2 を考える）

- ① $tx_1 + (1-t)x_2$ は x_1 と x_2 の内分点
- ② $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ は $f(x_1)$ と $f(x_2)$ の内分点
- 凸関数とは常に②が f(①)よりも上にある関数



下に凸な関数（凸関数）



一見, 凸関数に見えるが
非凸関数の例

凸関数の性質

命題1

check!

- 関数 f が $f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ 関数 f は下に凸な関数
- 関数 f が $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ 関数 f は上に凸な関数

命題2

- 関数 f が凸関数のとき $f'(x^*) = 0$ ならば,
  関数 f は $x = x^*$ で最小となる

問題：次の関数が凸関数であるかどうか確かめよ

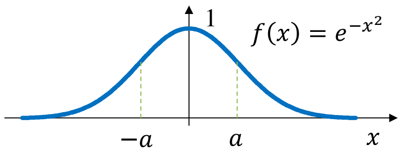
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 \ (x > 1)$

関数の増減と凹凸

演習問題

- 関数 $f(x)=e^{-x^2}$ に関して増減表と凹凸表を作ると下記のようになる。また，グラフの概形は右下図のようになる

x	$\dots$	$-a$	$\dots$	0	$\dots$	a	$\dots$
$f(x)$	↗	変曲点	↗	極大点	↘	変曲点	↘
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$



関数 $f(x)=e^{-x^2}$ が上に凸な関数となる x の範囲を求めよ（ヒント：上の図表内の a の値を求めればよい）

※この関数は統計学で最も重要な分布である正規分布の特殊形

関数の近似

関数近似のモチベーション

- 複雑な関数を簡単な関数で近似したい

微分の意味の再考

check!

- $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$
- 微分は関数 $f(x)$ の $x=a$ における1次式による近似
  簡単に近似できるが，近似精度はよくない

テイラー展開による近似

- $f(x)$ を多項式で近似
- どのような多項式？ $\Rightarrow$ n 階の微分係数までが一致

テイラー展開

関数 $f(x)$ の $x=a$ における多項式による近似

check!

- 関数 $f(x)$ が $x=a$ を含む区間で無限回微分可能であり，かつ，$\lim_{\Delta x\to 0} R_n=0$ のとき，

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,(a<c<x)$$

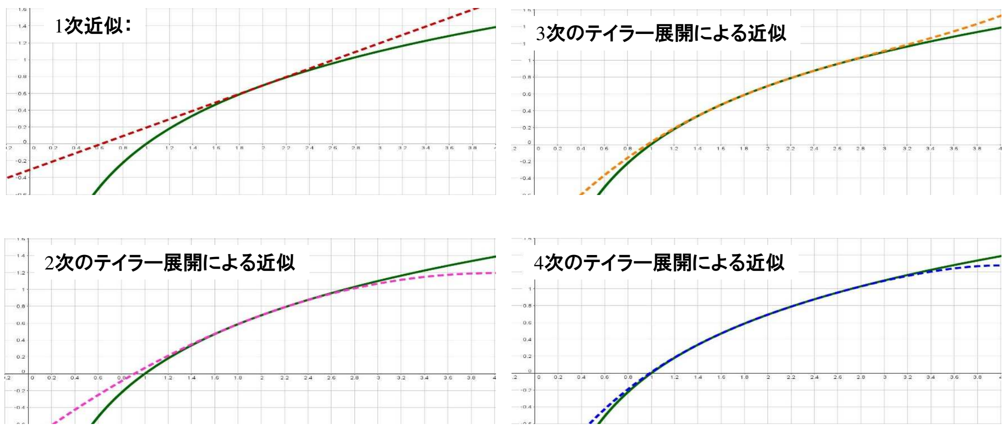
※ $a=0$ のときのテイラー展開をマクローリン展開と呼ぶ

※本講義の性質から R_n（剰余項と呼ぶ）に関する話題は割愛。以降の例題と問題は、$\lim_{\Delta x\to 0} R_n=0$ であることを前提とする。詳しく知りたい人は、ダランベールの判定法を学習

テイラー展開による関数近似の例

例：$\log(x)$ の $x=2$ における近似

- 1次以上の多項式で近似 $\Rightarrow$ 近似精度UP



演習問題

例題： $f(x) = \frac{1}{1-x}$ **を** $x = 0$ **においてテイラー展開（マクローリン展開）しなさい**

問題1**：** $f(x) = e^x$ **を** $x = 0$ **においてテイラー展開（マクローリン展開）しなさい**

問題2**：上のテイラー展開の結果を用いて,** $e^{0.1}$ **の近似値（**2**次の項までを利用）を求めなさい**