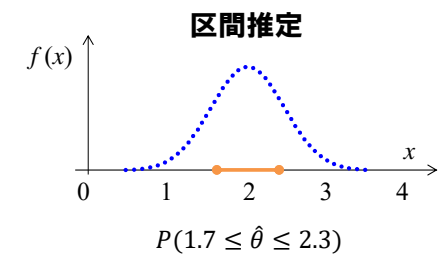
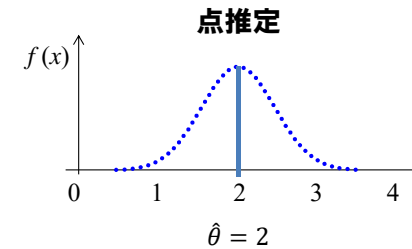


統計学入門 補助資料 ～推定量とその性質～

2022年度1学期: 月曜2限
担当教員: 石垣 司

推定

- 標本から母集団の分布のパラメータ(母数)を求める
 - 点推定 未知のパラメータ θ を1点で推定
 - 区間推定 未知のパラメータ θ が存在する区間を推定
- データ(標本の実現値)を利用して未知 θ の値を推定
 - 例 データ $\{2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 2\}$ から母集団の母平均を推定



推定量 #1

• 推定量(estimator)

- 標本からパラメータを推定する関数
 - 統計量と同じ。推定が目的の場合の統計量。推定量も確率変数
 - 推定値 観測値から推定量を計算した実際の値
- 無作為標本 $X = \{X_1, \dots, X_n\}$
- パラメータ θ
- 推定量 $T(X)$ or $\hat{\theta}$

- 例 標本平均の推定量

$$\hat{\theta} = T(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

推定量

推定量 #2

• 推定量は自由に設定可能

- 例 母平均 μ の推定量の候補

$$T_1(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$T_2(X) = \frac{1}{n+1} \left(X_1 + \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

$$T_3(X) = \frac{1}{2} (X_1 + X_n)$$

- $T_1(X)$ が標本平均の推定量として用いられるのは、**不偏性, 一致性, よい効率性**をもつため

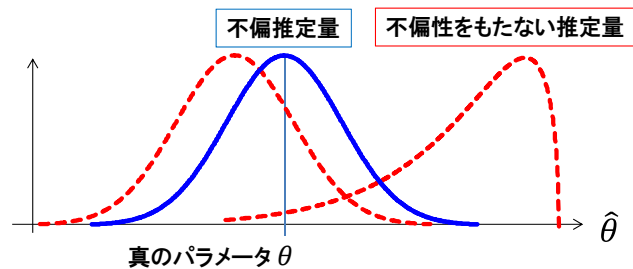
不偏性 (Unbiasedness)

- 推定量の期待値がパラメータ θ となる性質

$$E[T(X)] = \theta$$

- 不偏推定量** 不偏性をもつ推定量

- 「推定量 $T(X)$ は不偏である」
- 平均的に過大評価も過小評価もしない推定量



5

演習問題

- 問題

- 推定量 $T_1(X)$ と $T_2(X)$ はそれぞれ母平均の不偏推定量となるか確かめよ

$$T_1(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$T_2(X) = \frac{1}{n+1} \left(X_1 + \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

- 次の推定量 S^* は母分散の不偏推定量となるか確かめよ

$$S^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

6

一貫性 (Consistency)

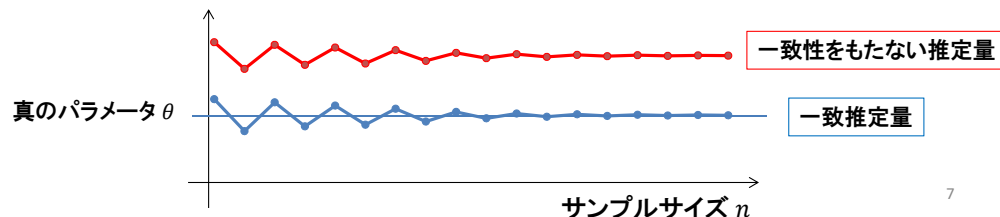
- サンプルサイズ n が大きくなると推定量がパラメータ θ に近づく性質

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T(X) - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon \text{ は正の定数})$$

- 推定量 $T(X)$ と母数 θ のズレが ε よりも大きい確率はゼロに近づく

- 一致推定量** 一貫性をもつ推定量

- 推定量が一貫性を持たない場合、サンプルサイズ n をどれだけ大きくしても、母集団のパラメータ(一点)に一致しない



7

一貫性の判定

- 一貫性を満たす推定量の例

- 母平均の推定量 標本平均 $T_1(X) = \bar{X}$, $T_2(X)$
- 母分散の推定量 標本分散 S^2, S^*

- 一貫性を満たさない推定量 $T(X)$ のチェック方法

- $\lim_{n \rightarrow \infty} V[T(X)] > 0$ ならば一致推定量とはならない

- $\lim_{n \rightarrow \infty} V[T(X)] = 0$ は一致推定量の必要条件 **check!**
- 十分条件や必要十分条件ではないので注意

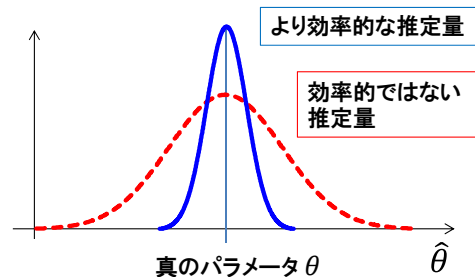
- 問題

- $T_3(X) = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ は母平均の不偏推定量となるか、また、一致推定量となるかそれぞれ確かめよ

8

効率性(Efficiency)

- **効率的な推定量** 分散のより小さな推定量
- **最小分散推定量** 最も分散の小さな推定量
 - 不偏推定量かつ一致推定量が複数ある場合, さらに良い推定量を選ぶ基準として用いられる



問題

$$T_1(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$T_2(X) = \frac{1}{n+1} (X_1 + \sum_{i=1}^n X_i)$$

- $T_1(X)$ と $T_2(X)$ は不偏推定量かつ一致推定量である。
 $V[T_1(X)]$ と $V[T_2(X)]$ からどちらがより効率的な推定量となるか確かめよ

9

その他の性質

- **最小分散不偏推定量**
 - あらゆる不偏推定量の中で, 最も効率的な推定量
- **正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本に関して,**
 - 「標本平均 \bar{X} は母平均 μ の最小分散不偏推定量」
 - 「標本分散 S^2 は母分散 σ^2 の最小分散不偏推定量」
 - “平均”や“分散”を当然のように推定量として使用しているが, その理論的正当性の保証
- **その他の性質**
 - 漸近正規性, 漸近有効性, 十分統計量, 頑健性など

10

(補足)なぜこのような規範が必要?

- **不偏性や一致性の必要性**
 - 平均や分散の普遍性や一致性は自明に近い
 - 自明ではない例 単回帰分析の最小2乗推定量
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2}, \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \bar{X}$$
 - \hat{b} は母集団の傾きの不偏推定量? 一致推定量?
 - ちなみに, ある仮定の下で, 最小分散不偏推定量かつ一致推定量
- **経済データ分析の特徴**
 - 現象は複雑だが観測できるサンプルサイズ n は小さい
 - 不偏性や一致性を持つ推定量での議論が重要

11