


# 統計学入門 補助資料 ～2変数間の確率変数～


2022年度1学期: 月曜2限  
担当教員: 石垣 司

## 2変数間の離散型同時確率

- **同時確率** 事象  $A$  と  $B$  が同時に生じる確率 
- **周辺確率**  $A$  or  $B$  の単独の事象が生じる確率
  - 例 赤と青の2色のサイコロを投げる
  - 事象  $A$  「赤のサイコロが偶数の目がでる」
  - 事象  $B$  「青のサイコロが2以下の目がでる」

赤 \ 青	$B$ (2以下)	$B$ (3以上)	赤の周辺確率
$A$ (偶数)	$P(A \cap B) = 1/6$	$P(A \cap B^c) = 1/3$	$P(A) = 1/2$
$A$ (奇数)	$P(A^c \cap B) = 1/6$	$P(A^c \cap B^c) = 1/3$	$P(A^c) = 1/2$
青の周辺確率	$P(B) = 1/3$	$P(B^c) = 2/3$	1

## 2変数間の離散型同時確率関数

- **同時確率関数** 同時確率の確率関数 
- **周辺確率関数** 確率変数  $X$  や  $Y$  の独自の確率関数
  - 事象  $A$  の確率変数  $X$  (赤=奇数) = 0,  $X$  (赤=偶数) = 1
  - 事象  $B$  の確率変数  $Y$  (青=2以下) = 0,  $Y$  (赤=3以上) = 1
  - $P_X$   $X$  の周辺確率関数
  - $P_{X,Y}$   $X$  と  $Y$  の同時確率関数

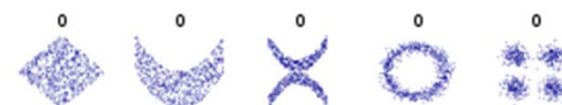
$X \setminus Y$	0	1	$X$ の周辺確率
0	$P_{X,Y}(0,0) = 1/6$	$P_{X,Y}(0,1) = 1/3$	$P_X(0) = 1/2$
1	$P_{X,Y}(1,0) = 1/6$	$P_{X,Y}(1,1) = 1/3$	$P_X(1) = 1/2$
$Y$ の周辺確率	$P_Y(0) = 1/3$	$P_Y(1) = 1/3$	1

## 独立性

- **確率変数  $X$  と  $Y$  はお互いに影響を与えない**
  - 例 青( $X$ )と赤( $Y$ )のサイコロの出る目は独立
  - 例 若年者層の割合( $X$ )と婚姻率( $Y$ )は非独立
- **独立と相関**
  - 独立であれば無相関
  - 無相関であっても独立とは限らない



無相関で独立の例



無相関であるが独立ではない例

## 独立のときの同時確率と条件付き確率

### 独立のときの同時確率

- 独立の定義 確率変数  $X$  と  $Y$  の同時確率はそれぞれの確率の積に分解できるとき,  $X$  と  $Y$  は独立であるという

$$P(X, Y) = P(X)P(Y)$$

### 独立のときの条件付き確率

$$P(Y|X) = P(Y)$$

- 確率変数  $X$  の取る値によって  $Y$  の確率は変化しない

- 2変数の同時確率関数の独立性の条件

$$p(0,0)p(1,1) = p(0,1)p(1,0)$$

$X/Y$	0	1
0	$p(0,0)$	$p(0,1)$
1	$p(1,0)$	$p(1,1)$

## 確率変数の共分散と相関係数

### 確率変数 $X$ と $Y$ の共分散

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- 確率変数間の共変動の大きさ
- 確率変数  $X$  と  $Y$  が独立のとき  $Cov[X, Y] = 0$

### 確率変数 $X$ と $Y$ の相関係数

$$\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$$

- 確率変数  $X$  と  $Y$  が独立のとき  $\rho = 0$
- 値の範囲  $-1 \leq \rho \leq 1$

## コリンズ裁判

(68 Cal. 2d 319, 438 P.2d 33, 66 Cal. Rptr. 497)

### 1964年米国カルフォルニアで強盗事件が発生

- 目撃証言による犯人の特徴がコリンズ夫妻に一致し逮捕

- 検察が裁判の立証の中で次の確率を(控えめに)算出

- 一部が黄色の車  $\frac{1}{10}$ , 口ひげの男  $\frac{1}{4}$ , あごひげの黒人  $\frac{1}{10}$ ,  
ポニーテールの女  $\frac{1}{10}$ , ブロンドの女  $\frac{1}{3}$ , 車の異人種のカップル  $\frac{1}{1000}$

※コリンズ夫妻の特徴は上のすべてに当てはまる

- 「確率の乗法定理から, 目撃証言のすべての特徴に一組の夫妻が一致する確率は(控えめに見ても)1/1200万」 ⇒ 有罪判決

### 問題 確率論の観点から立証の間違えを指摘しなさい

## 2つの確率変数の期待値

### 和の性質

- 平均  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- 分散  $V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X, Y]$

### 共分散の性質

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov[aX, bY] = abCov[X, Y]$$

### $X$ と $Y$ が独立のとき

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

### 問題

- $V[X] = 2, V[Y] = 1, Cov[X, Y] = -1$  のとき  
 $V[3X + 2Y]$  の値を求めなさい

## ファイナンス理論への応用

### 例 証券の分割投資(ポートフォリオ)の最適化

– 株式  $x$  と株式  $y$  に10億円を分割投資し「安全」に運用したい

- 株式  $x$  と  $y$  の価格は確率変数  $(X, Y)$
- 株式  $x$  の期待収益率  $(E[X])$ , リスク  $(V[X])$
- 株式  $y$  の期待収益率  $(E[Y])$ , リスク  $(V[Y])$
- 確率変数  $X$  と  $Y$  の相関係数  $\rho$  (通常は負の相関がある  $x$  と  $y$  を選ぶ)

– 「安全」の意味 株式価格の分散の最小化

$$W = tX + (1 - t)Y$$

- $t$  分割率 ( $0 \leq t \leq 1$ )

– 最適なポートフォリオ

$W$  のリスク  $(V[W])$  が最小となる分割率  $t$  による  
株式  $x$  と株式  $y$  の分割投資



9

## ファイナンス理論への応用～演習問題

1. ポートフォリオの期待収益率  $E[W]$  を  $t, E[X], E[Y]$  を用いて表せ
2. ポートフォリオのリスク  $V[W]$  を  $t, V[X], V[Y], \rho$  を用いて表せ
3. リスク  $V[W]$  を最小化する  $t$  を求めよ  
※ヒント 最小二乗法を用いる( $V[W]$  は  $t$  の2次式となる。 $V[W]$  を  $t$  で微分し, その値が0となる点が最小点)
4.  $V[X] = 1, V[Y] = 4, \rho = -0.5$  とするとき,  $t$  と  $V[W]$  の値を求めよ

10

## 演習問題

- 2つの確率変数  $X$  と  $Y$  を考える。また,  $V[X] = V[Y] = \sigma^2$  であるとする。ここで,

$$A = X + Y, \quad B = X - Y$$

とするとき,  $Cov[A, B]$  の値を求めなさい

11