統計学入門
～分散・相関に関する検定～

2025年度1学期:　　　月曜2限

担当教員:　　　　　　石垣　司

分散・相関・比率に関する検定

① 1つの正規母集団の等分散性の検定

- 統計量 $U = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2分布に従う

② 2つの正規母集団の等分散性の検定

- 2つの母分散が等しいかどうかの検定

③ 比率の検定

④ 相関係数の検定

① 1つの正規母集団の分散の検定

検定統計量　$U = (n-1)\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$　(**自由度** $n-1$ **の** χ^2 **分布**)

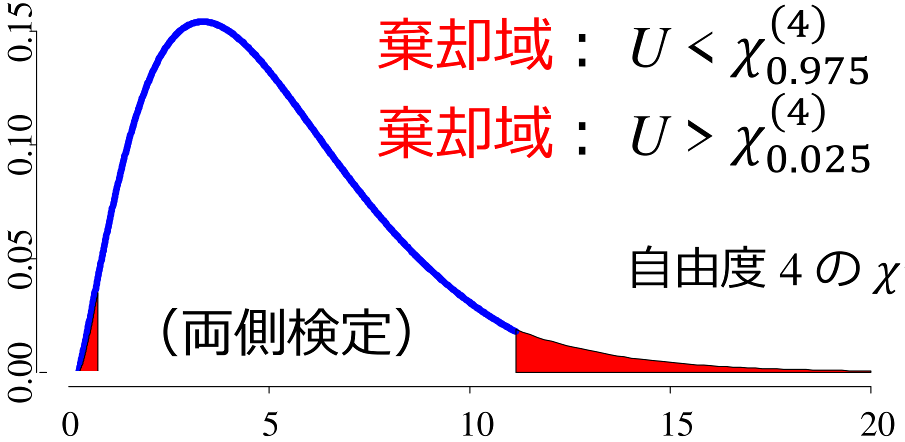
- **帰無仮説**　$\sigma^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 **は帰無仮説の下での分散**)
- **例：**$n=5$ **での有意水準**5%**の両側検定** (**対立仮説** $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$)

  境界値 $R_+ = \chi^{(4)}_{0.025} = 11.1$ (χ^2 **分布表より**)

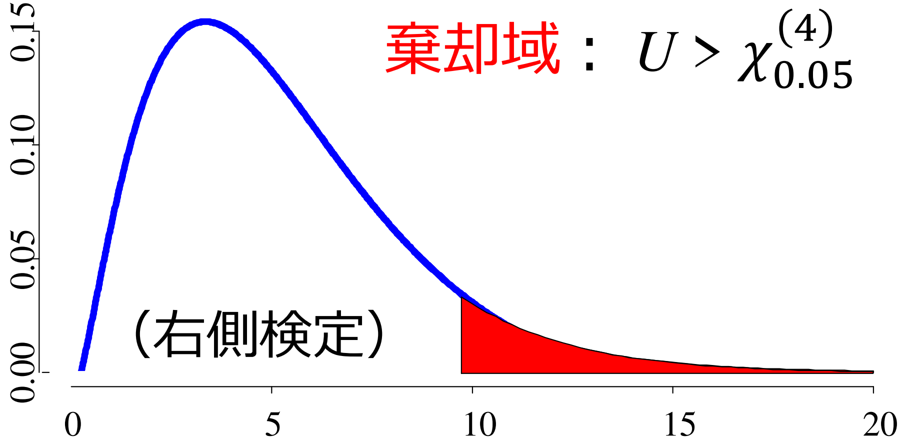
  境界値 $R_- = \chi^{(4)}_{0.975} = 0.48$ (χ^2 **分布表より**)

- **例：**$n=5$ **での有意水準**5%**の右側検定** (**対立仮説** $\sigma^2 > \sigma_0^2$)

  境界値 $R = \chi^{(4)}_{0.05} = 9.49$ (χ^2 **分布表より**)



自由度 4 の χ^2分布



演習問題

問題

- ある工場では重さ10.0gの薬品を大量生産している。その重さは $N(10, 0.1^2)$ となるように品質管理している。
  あるとき、サンプル9個を無作為に抜き打ち検査したところ, $\bar{X} = 9.9, S^2 = 0.15^2$ であった。
- 母分散は $\sigma^2 = 0.1^2$ に管理されているか5%有意水準で両側検定しなさい。

$\chi^{(8)}_{0.025} = 17.53, \chi^{(9)}_{0.025} = 19.02, \chi^{(8)}_{0.05} = 15.51, \chi^{(9)}_{0.05} = 16.92,$
$\chi^{(8)}_{0.975} = 2.18, \chi^{(9)}_{0.975} = 2.70, \chi^{(8)}_{0.95} = 2.73, \chi^{(9)}_{0.95} = 3.33$

② 等分散性の検定とF分布

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1

- **両側検定** $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- **右側検定** $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \text{ or } \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2$, $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
- **左側検定** $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \text{ or } \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2$, $H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

検定統計量に標本分散の比 $F = S_x^2 / S_y^2$ を採用

- $F \approx 1$ ならば帰無仮説 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ が正しい

  補足　平均の検定とは異なり $D = S_x^2 - S_y^2$ が従う分布は不明

F 分布

- χ^2分布に従う確率変数の比の分布

  帰無仮説 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ の下で F が従う分布

F 分布 #1

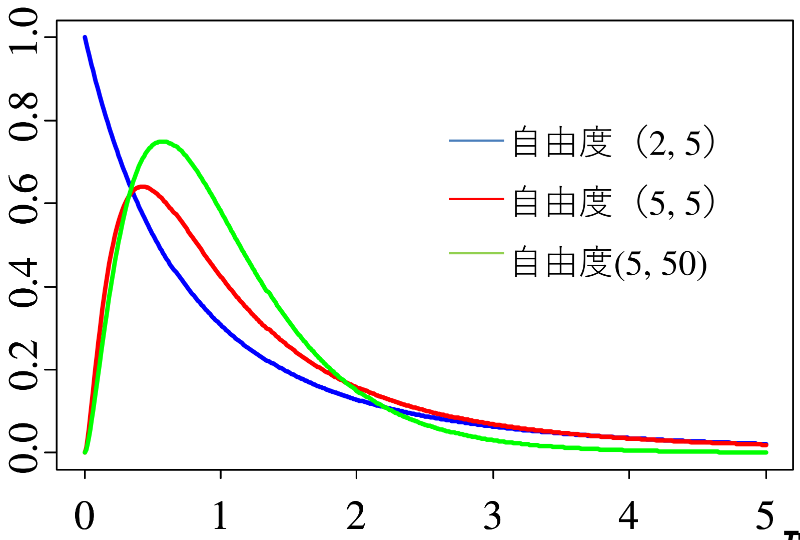
自由度 (n, m) の F 分布

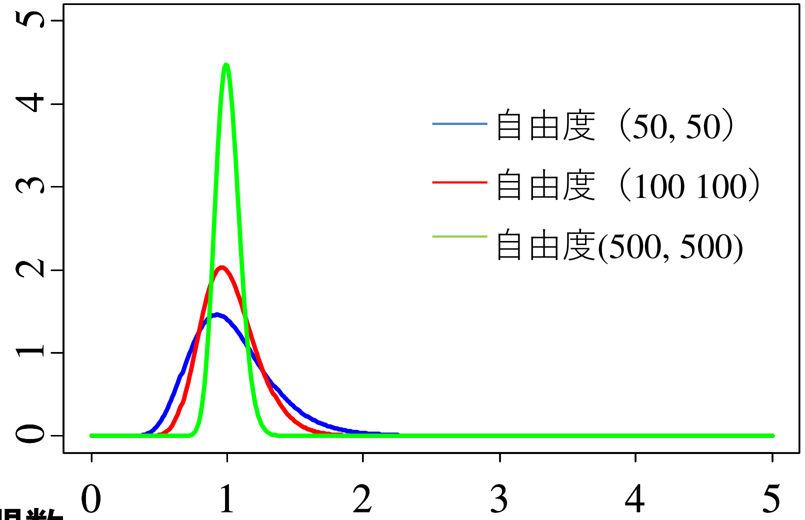
– V は自由度 n, W は自由度 m の χ^2 確率変数で互いに独立とするとき，$\dfrac{V/n}{W/m}$ の従う分布

n, m が大きくなると1の周辺に密度関数が集まる

check!

$F = \dfrac{S_x^2/\sigma_x^2}{S_y^2/\sigma_y^2}$ は自由度 $(n-1, m-1)$ の F 分布に従う





確率密度関数

F 分布 #2

F 分布の逆数の分布

check!

- F が自由度 (n,m) の F 分布に従うとき, $1/F$ は自由度(m,n) の F 分布に従う

F 分布のパーセント点

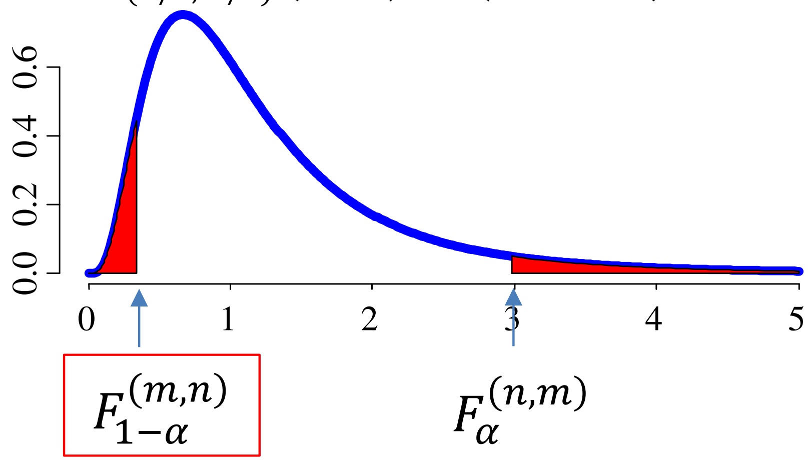
- $F_{\alpha}^{(n,m)}$: 自由度 (n,m) の F 分布の上側$100\times\alpha\%$点

  $F_{\alpha}^{(n,m)}$ の値は F 分布表より利用可

- 自由度 (n,m) の F 分布の下側$100\times\alpha\%$点

  $F_{1-\alpha}^{(n,m)} = 1/F_{\alpha}^{(m,n)}$ check!

確率密度関数 $f(x) = \frac{1}{Beta(n/2,m/2)}\left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{n/2}\left(1-\frac{nx}{nx+m}\right)^{m/2}x^{-1}$



② 正規母集団の等分散性の検定

Practice!

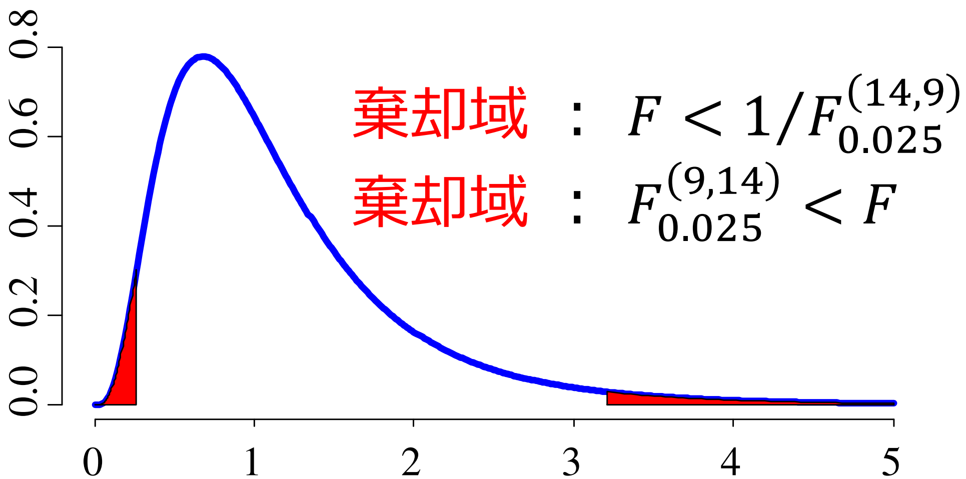
検定統計量　$F = S_x^2 / S_y^2$

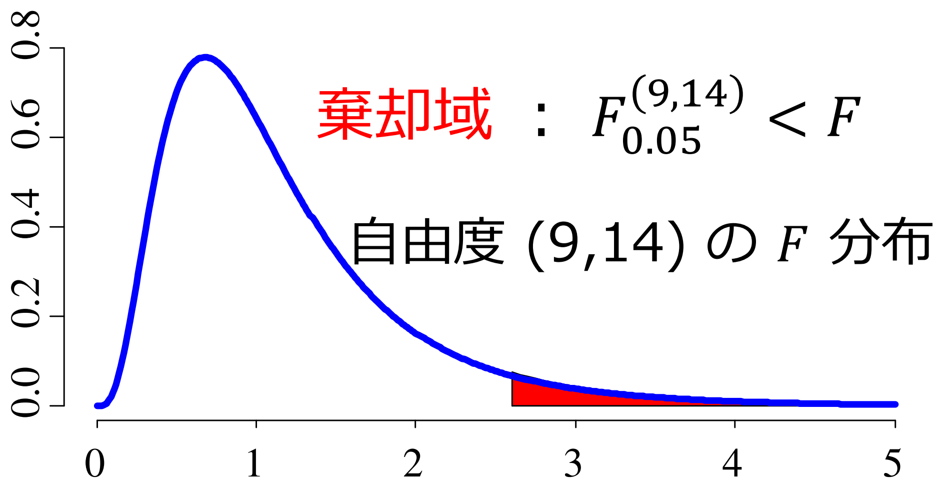
- 帰無仮説　$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$
- 例：$n = 10, m = 15$での5%水準の両側検定 (対立仮説 $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$)

  境界値 $R_+ = F_{0.025}^{(9,14)} = 3.21$ (F 分布表より)

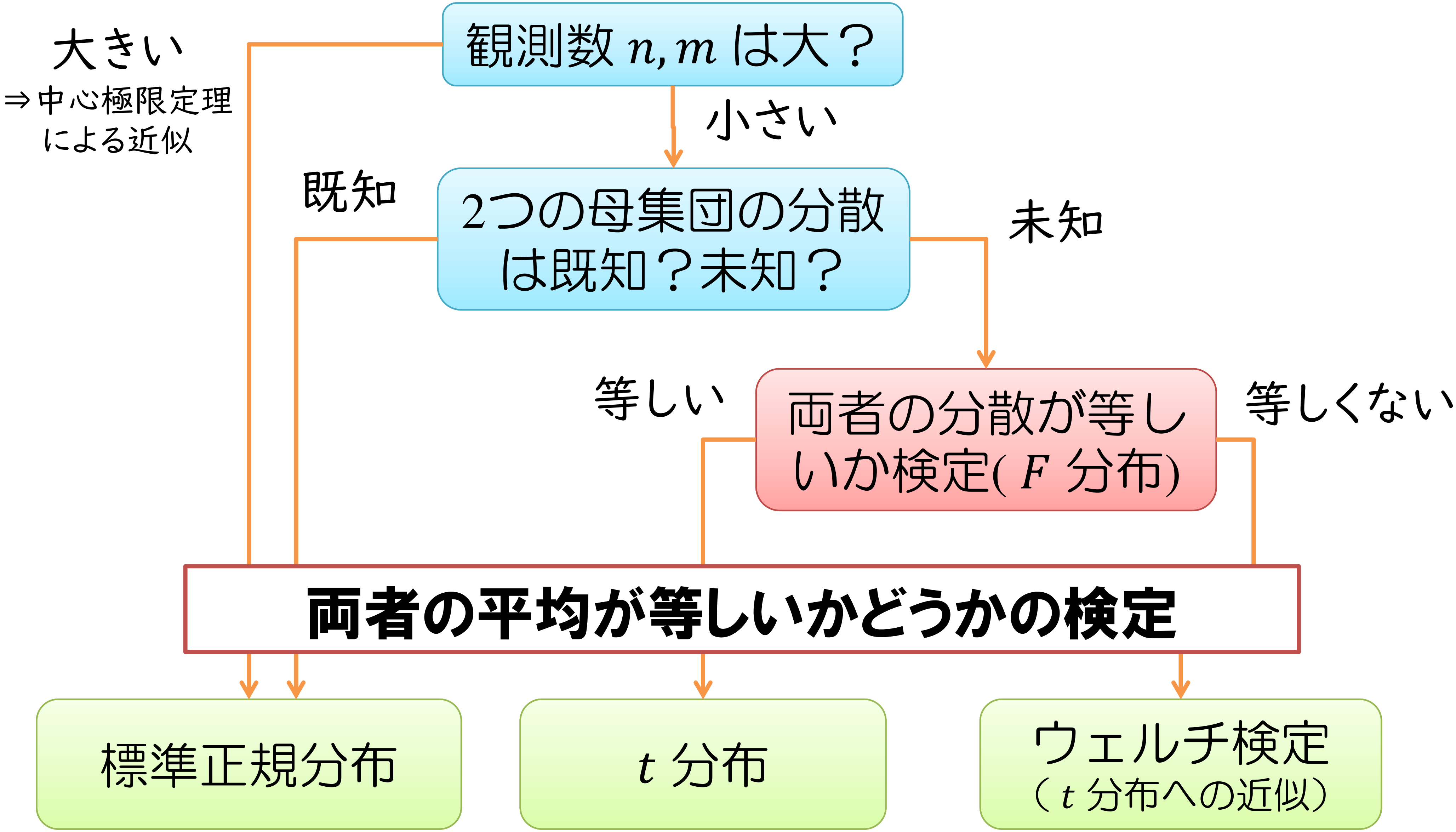
  境界値 $R_- = F_{0.975}^{(9,14)} = 1/F_{0.025}^{(14,9)} = 0.31$ ($F_{0.025}^{(14,9)}$の値は F 分布表より)
- 例：$n = 10, m = 15$での5%水準の右側検定 (対立仮説 $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$)

  境界値 $R = F_{0.05}^{(9,14)} = 2.65$ (F 分布表より)





検定統計量の選択のフローチャート



演習問題

問題

– ある工場では重さ10.0gの薬品を大量生産している。あるとき, 製造ライン X から7個, 製造ライン Y から9個のサンプルを無作為に抜き打ち検査したところ $\bar{X} = 10.1$, $\bar{Y} = 9.8$, $S_x^2 = (0.2)^2$, $S_y^2 = (0.3)^2$であった。

1. このとき、両ラインで製造される製品の母分散は等しいか5%有意水準で両側検定しなさい
2. 母平均に差があるか検定したい。このとき, 検定統計量 Z (標準正規分布), 検定統計量 T (t 分布), Welchの t 検定のうちどの検定方法を用いるべきか議論しなさい

$F_{0.025}^{(6,8)} = 4.65$, $F_{0.025}^{(8,6)} = 5.60$, $F_{0.025}^{(7,9)} = 4.20$, $F_{0.025}^{(9,7)} = 4.82$,

$F_{0.05}^{(6,8)} = 3.58$, $F_{0.05}^{(8,6)} = 4.15$, $F_{0.05}^{(7,9)} = 3.29$, $F_{0.05}^{(9,7)} = 3.68$

③ 比率に関する検定

母比率がある値と異なるかどうかの検定

– **帰無仮説**　$p = p_0$

　p：母比率, p_0：帰無仮説の下での比率

– **検定統計量** $Z = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$ (標準正規分布)

　n が大きいとき, 中心極限定理により正規近似

2つの母比率の差の検定

– **帰無仮説**　$p_x = p_y$

　p_x, p_y：2つの母集団（集団XとY）の母比率

– **検定統計量** $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\tilde{p}(1 - \tilde{p})/\{(1/n) + (1/m)\}}}, \tilde{p} = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n + m}$

　n が大きいとき, 中心極限定理により正規近似

演習問題

問題

- A社とB社がそれぞれ内閣の支持率調査を行った。
- A社　　回答者900人、支持者495人。$\bar{X} = 0.55$
- B社　　回答者100人、支持者55人。$\bar{X} = 0.55$
- 以前の調査での内閣支持率は50%であった。このとき"内閣の支持率は上昇した"という対立仮説をA社とB社のそれぞれの調査結果に対して5%有意水準で片側検定しなさい

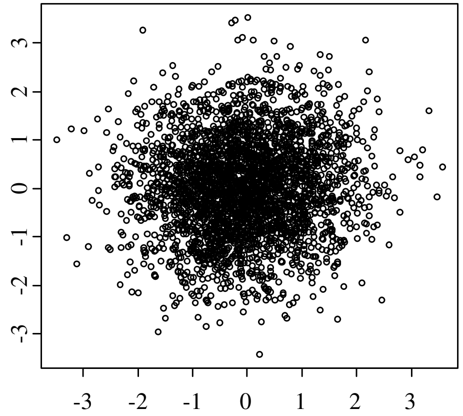
$Z_{0.025} = 1.96, Z_{0.05} = 1.65$

④ 相関係数の検定

相関係数がゼロか否かの検定

- 帰無仮説 $\rho_{xy} = 0$, 対立仮説 $\rho_{xy} \neq 0$

  母相関係数 ρ_{xy}, 標本相関係数 r_{xy}



例 $n = 5{,}000$, $r_{xy} = 0.054$, p値:0.0002

検定統計量 $T = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}$

- T は自由度 $n-2$ の t 分布に従う

- 実用上の注意すべき例

  $\rho_{xy} = 0.05$ (社会科学分野では相関無し)の分布から各サンプルサイズで1000回乱数発生させせたときの5%水準で有意差ありの回数(シミュレーション)

  検定では"効果の大きさ"は測っていないことが分かる例

サンプルサイズ	$n = 100$	$n = 1{,}000$	$n = 5{,}000$	$n = 10{,}000$
有意差あり	66回	356回	950回	1000回