統計学入門
～平均に関する検定～

2025年度1学期：　　月曜2限

担当教員：　　　　　石垣　司

平均に関する検定

1つの正規母集団に関する平均の検定

- ① 母分散が既知の場合
- ② 母分散が未知の場合

非正規母集団の平均の検定

- ③ サンプルサイズ n が大きい場合

2つの正規母集団の平均の差の検定(対応のない検定)

- ④ 2つの母分散が既知の場合
- ⑤ 2つの母分散が未知で両者が等しい場合
- ⑥ 2つの母分散が未知で両者が等しくない場合
- ⑦ 対応のある検定（対応するデータの"差の平均"の検定）

① 1つの正規母集団で母分散が既知

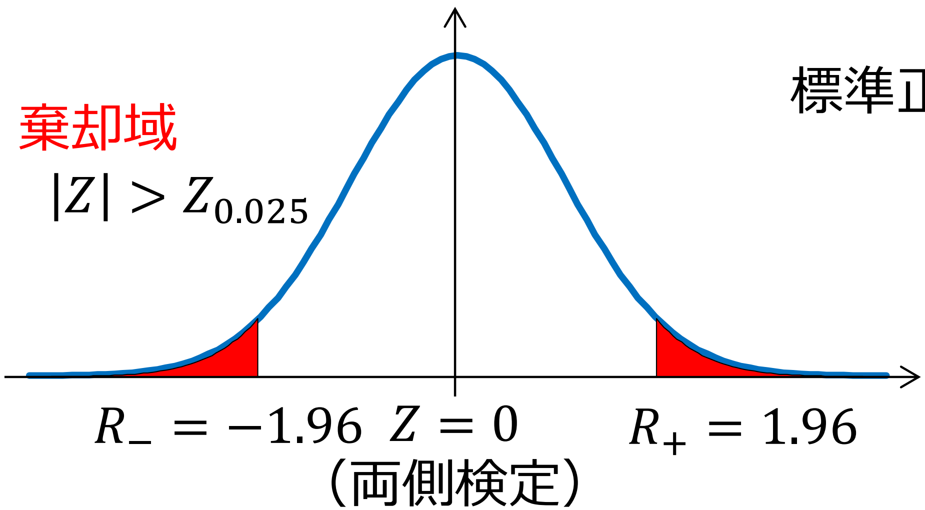
検定統計量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ **(標準正規分布)**

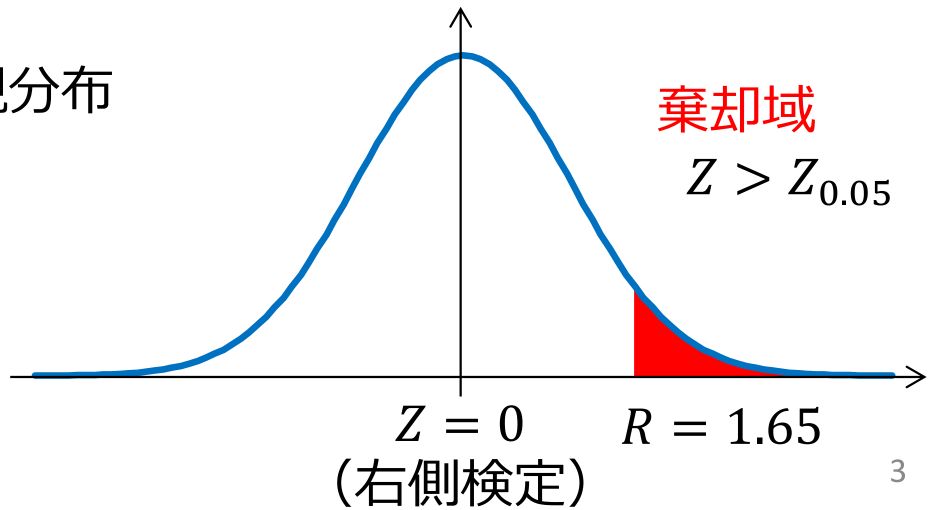
- **帰無仮説** $\mu = \mu_0$ (μ**は母平均。**μ_0**:帰無仮説の下での平均**)
- **例: 有意水準5%の両側検定 (対立仮説** $\mu \neq \mu_0$**)**

  境界値 $R_+ = Z_{0.025} = 1.96$ **(標準正規分布表より)**

  境界値 $R_- = -Z_{0.025} = -1.96$
- **例: 有意水準5%の右側検定 (対立仮説** $\mu > \mu_0$**)**

  境界値 $R = Z_{0.05} = 1.65$ **(標準正規分布表より)**





② 1つの正規母集団で母分散が未知

Practice!

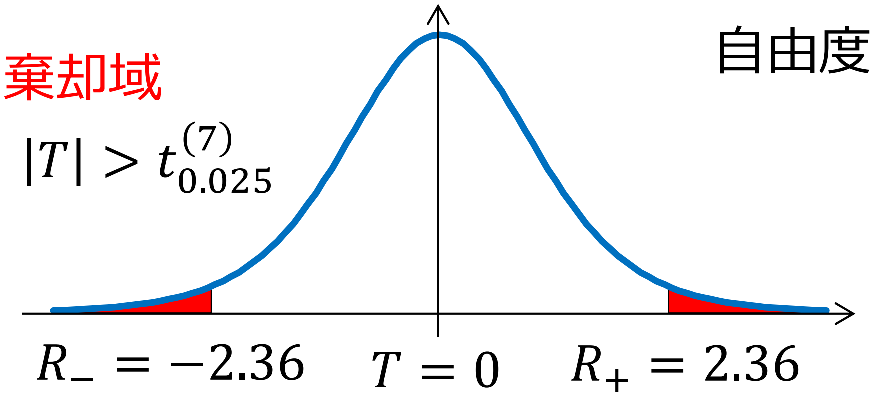
検定統計量 $T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ （**自由度** $n-1$ **の** t **分布**）

- **帰無仮説** $\mu = \mu_0$
- **例：**$n = 8$ **での有意水準**5%**の両側検定 (対立仮説** $\mu \neq \mu_0$)

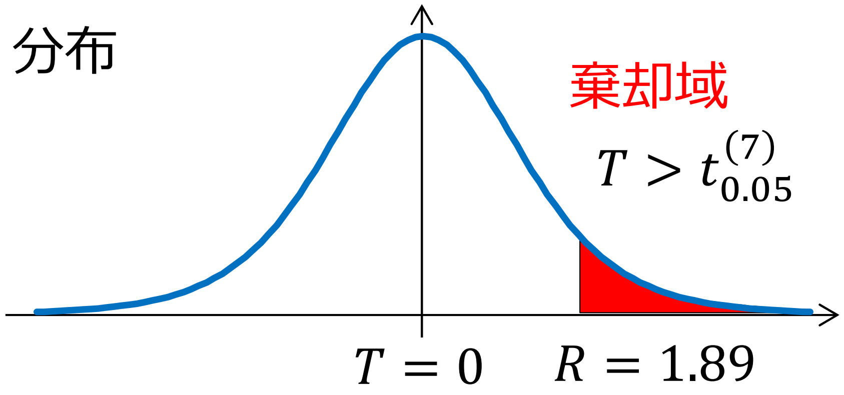
  境界値 $R_+ = t_{0.025}^{(7)} = 2.36$ (t **分布表より**)

  境界値 $R_- = -t_{0.025}^{(7)} = -2.36$
- **例：**$n = 8$ **での有意水準**5%**の右側検定 (対立仮説** $\mu > \mu_0$)

  境界値 $R = t_{0.05}^{(7)} = 1.89$ (t **分布表より**)



(両側検定)



(右側検定)

演習問題

問題

- ある工場では重さ10.0gの薬品を大量生産している。その重さのばらつきは $N(10, 0.1^2)$ となるように品質管理している。あるとき、サンプル9個を無作為に抜き打ち検査したところ, $\bar{X} = 9.9, S^2 = 0.15^2$ であった。

1. 母分散は $\sigma^2 = 0.1^2$ と管理されていると仮定し, 平均に関する品質は管理されているか5%有意水準で両側検定しなさい
2. 母分散も変動している可能性があると仮定し, 平均に関する品質は管理されているか5%有意水準で両側検定しなさい

$t_{0.025}^{(7)} = 2.36, t_{0.025}^{(8)} = 2.31, t_{0.025}^{(9)} = 2.26, t_{0.05}^{(7)} = 1.89,$
$t_{0.05}^{(8)} = 1.86, t_{0.05}^{(9)} = 1.83, Z_{0.025} = 1.96, Z_{0.05} = 1.65,$
$Z_{0.01} = 2.33, Z_{0.005} = 2.58$

③ 非正規母集団の平均の検定

サンプルサイズ n が大きい場合, 中心極限定理より,
標本平均 $\bar{X}$ の分布は$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に近似できる

検定統計量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (標準正規分布)

– 母分散 σ^2 は標本分散 S^2 で置き換える

演習問題

問題

- ある工場では重さ10.0gの薬品を大量生産している。新しい製造機器を導入したため, 製造される製品の重さのばらつきの分布は分かっていない。
- 導入初日に生産されたサンプル100個を無作為に抜き打ち検査したところ, $\bar{X} = 9.9, S^2 = 0.1^2$ であった。製造された薬品の重さの平均は 10.0g よりも小さくなってしまっているか1%有意水準で検定しなさい。

$t_{0.025}^{(7)} = 2.36, t_{0.025}^{(8)} = 2.31, t_{0.025}^{(9)} = 2.26, t_{0.05}^{(7)} = 1.89,$
$t_{0.05}^{(8)} = 1.86, t_{0.05}^{(9)} = 1.83, Z_{0.025} = 1.96, Z_{0.05} = 1.65,$
$Z_{0.01} = 2.33, Z_{0.005} = 2.58$

2つの正規母集団の平均の差の検定

2つの正規母集団(X, Y)の検定のための表記法

- $X_i \sim i.i.d. N(\mu_x, \sigma_x^2), i = 1, \dots, n$
- $Y_i \sim i.i.d. N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right), i = 1, \dots, m$
- **各** X_i **と** Y_j **は独立**
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$

帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1

- **両側検定** $H_0 : \mu_x = \mu_y, \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$
- **右側検定** $H_0 : \mu_x = \mu_y \text{ or } \mu_x \leq \mu_y, \quad H_1 : \mu_x > \mu_y$
- **左側検定** $H_0 : \mu_x = \mu_y \text{ or } \mu_x \geq \mu_y, \quad H_1 : \mu_x < \mu_y$

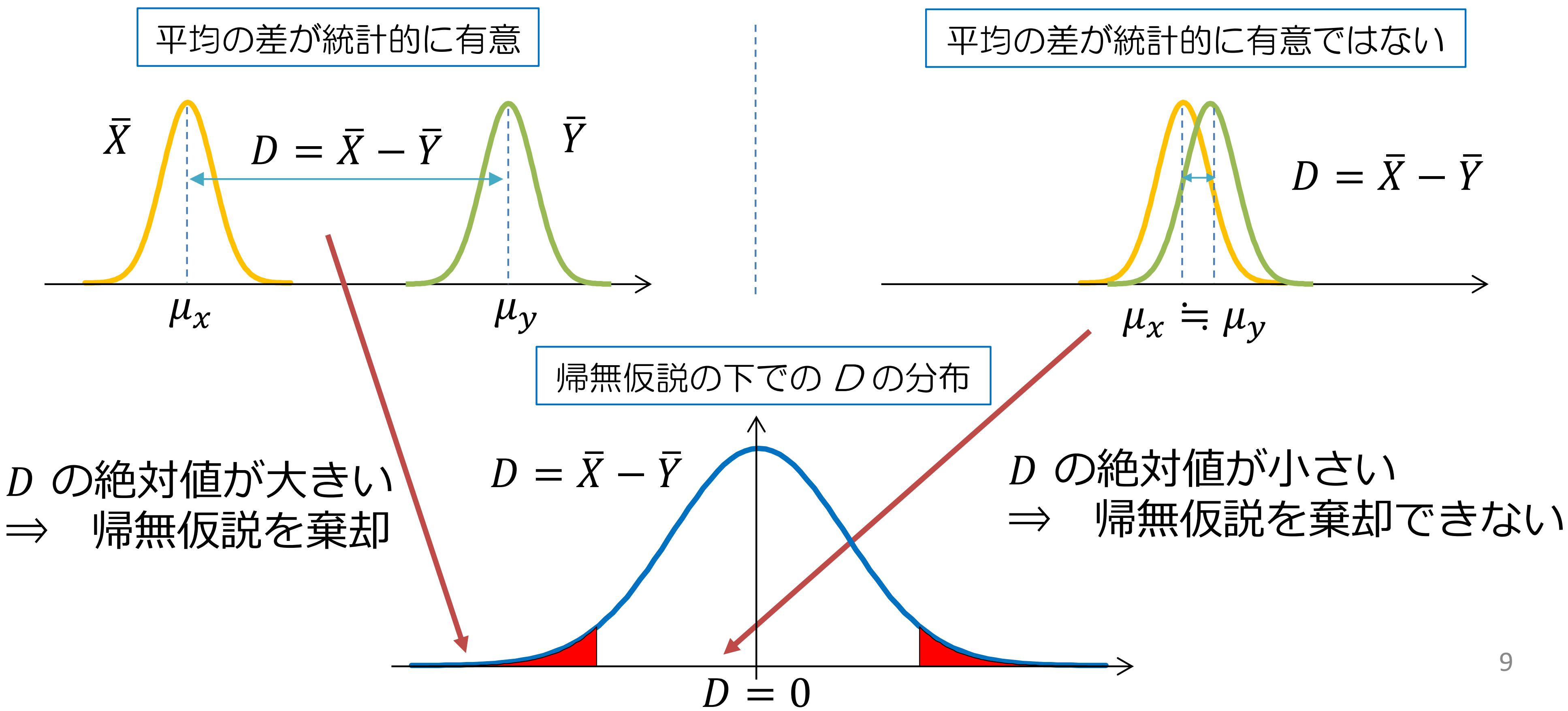
平均の差の検定のイメージ

Practice!

2つの標本平均の差 $D = \bar{X} - \bar{Y}$ の分布を利用

正規分布の和の再生性から D も正規分布に従う

– **帰無仮説 $\mu_x = \mu_y$ の下では、$E[D] = 0$**



2つの正規母集団の平均の差の検定 #1

④ 2つの母分散が既知の場合

– **検定統計量** $Z = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}}$　check!

– Z **は標準正規分布に従う**

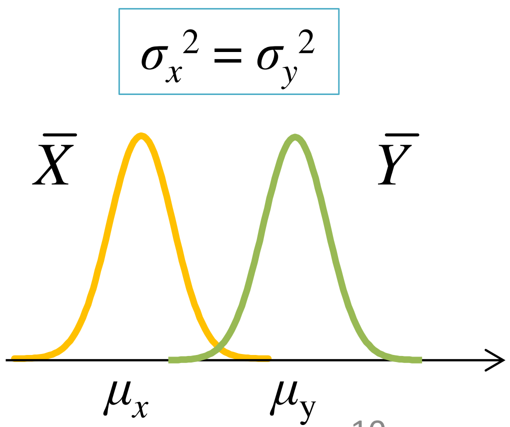
⑤ 2つの母分散が未知で $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ の場合

– **検定統計量** $T = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_*^2/n+S_*^2/m}} = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_*\sqrt{\frac{n+m}{nm}}}$　check!

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ **を** $S_*^2 = \dfrac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}$ **で代用**

S_*^2 **は** X **と** Y **に関する全標本の標本分散**

– T **は自由度** $n+m-2$ **の** t **分布に従う**



2つの正規母集団の平均の差の検定 #2

⑥ 2つの母分散が未知で $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ (Welchの t 検定)

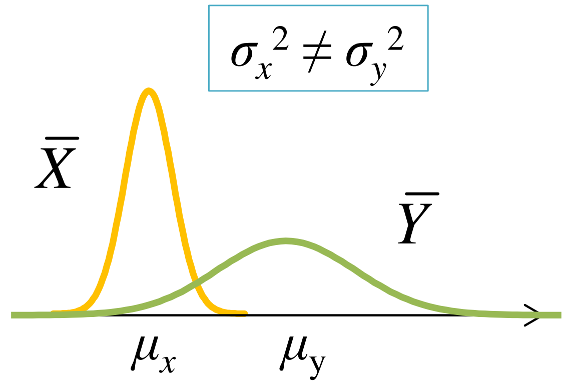
– **検定統計量** $T = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_x^2/n+S_y^2/m}}$

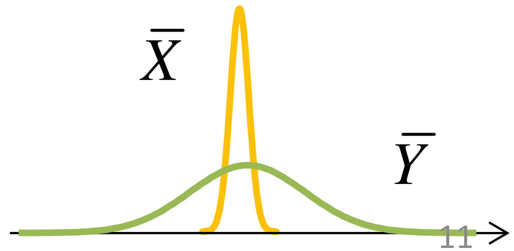
S_x^2 **は** X **に関する標本分散**, S_y^2 **は** Y **に関する標本分散**

– T **は自由度** v **の** t **分布に近似できる**

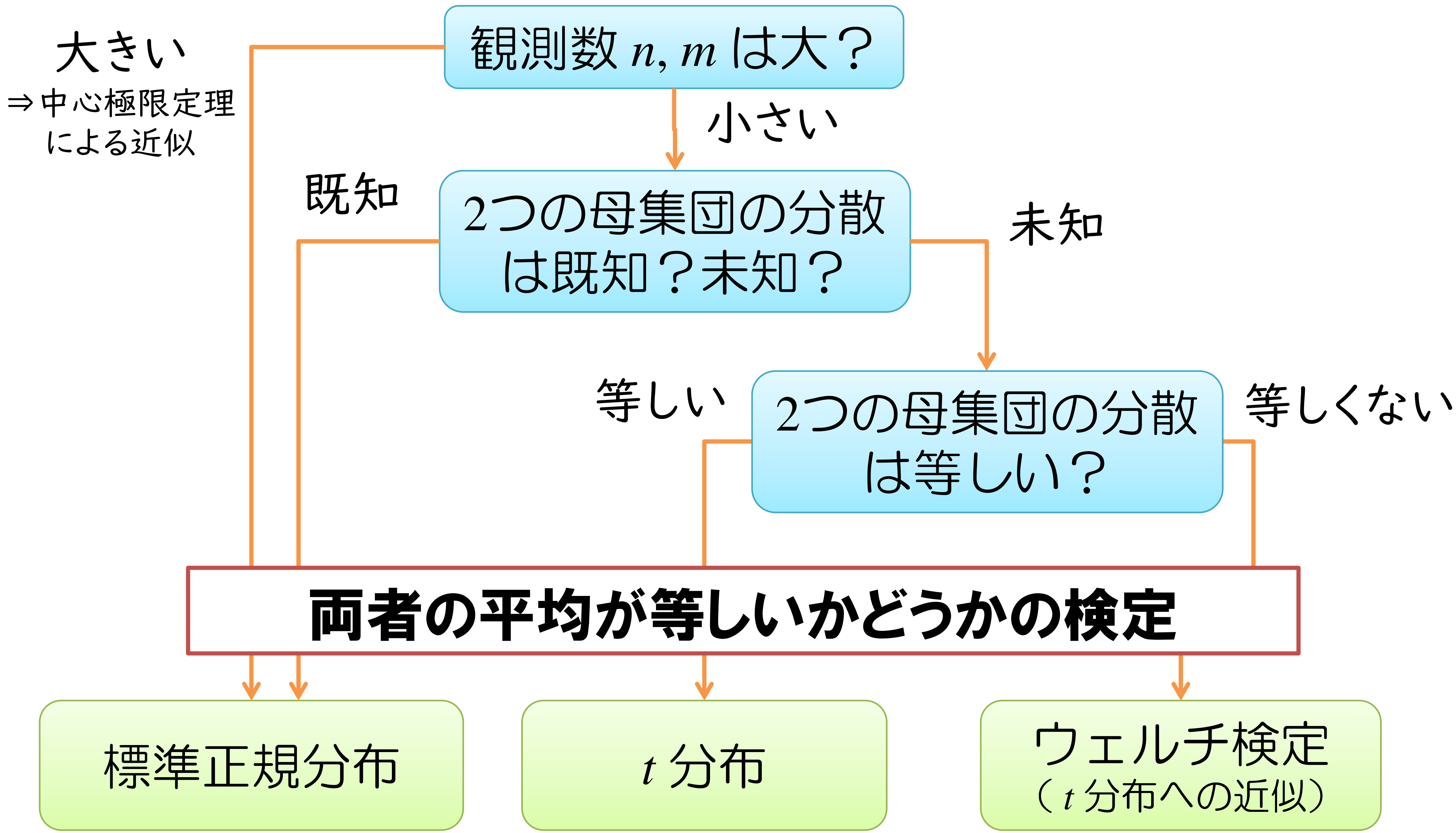
$$v^* \approx \frac{(S_x^2/n + S_y^2/m)^2}{\dfrac{S_x^4}{n^2(n-1)} + \dfrac{S_y^4}{m^2(m-1)}}$$

自由度 v **は** v^* **を四捨五入した整数**





検定統計量の選択のフローチャート



演習問題

問題

- ある工場では重さ10.0gの薬品を大量生産している。あるとき, 2つの異なる製造ライン(X と Y)では, 製造された薬品の重さの平均が異なるのではないかと疑問をもった
- サンプルを両ラインからそれぞれ8個を無作為に抜き打ち検査したところ, $\bar{X} = 10.1$, $\bar{Y} = 9.8$, $S_x^2 = S_y^2 = (0.2)^2$であった。両ラインで製造される製品の母分散は等しいと仮定し, 母平均に差があるか5%有意水準で両側検定しなさい

$t_{0.025}^{(7)} = 2.36$, $t_{0.025}^{(8)} = 2.31$, $t_{0.025}^{(14)} = 2.14$, $t_{0.025}^{(16)} = 2.12$, $t_{0.05}^{(7)} = 1.89$, $t_{0.05}^{(8)} = 1.86$, $t_{0.05}^{(14)} = 1.76$, $t_{0.05}^{(16)} = 1.75$, $Z_{0.025} = 1.96$, $Z_{0.05} = 1.65$, $Z_{0.01} = 2.33$, $Z_{0.005} = 2.58$

⑦ 対応のある検定 #1

同一対象からの2種類の標本の"差の平均"の検定

- 例：高血圧患者10人の最高血圧と新薬Aを3か月飲み続けた後の最高血圧を比較。新薬に血圧を下げる効果はあるか？
- 例：調査対象者20名に製品Aと製品Bのアンケート調査（10段階評価）を行った。両製品の得点に差はあるか？
- 例：30組の夫婦を対象に金銭感覚の調査を行った。夫婦間での許容できる交際費に差はあるか？

患者 No.	最高血圧（治療前）X	最高血圧（治療後）Y	差
1	$X_1 = 185$	$Y_1 = 167$	-18
2	$X_2 = 175$	$Y_2 = 165$	-10
3	$X_3 = 178$	$Y_3 = 183$	+5
…	…	…	…
n	$X_n = 190$	$Y_n = 150$	-40

検定の目的
この差の平均はゼロか？

⑦ 対応のある検定 #2

帰無仮説 $\mu_x = \mu_y \Leftrightarrow E[X_i - Y_i] = 0$

- **ここでは** X_i **と** Y_i **は同一対象から得られた標本**
  ④～⑥の検定では $X_i - Y_i$ **に意味はない**

検定統計量 $T = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$

- $d_i = X_i - Y_i,\ \bar{d} : d_i$**の標本平均**, $s_d : d_i$ **の標本標準偏差**
- T **は自由度** $n-1$ **の** t **分布に従う**
- **サンプルサイズ** n **が大きい場合は標準正規分布で近似**

- **⑦の検定は④～⑥の検定と比べて検出力が高い傾向**
  X **と** Y **の共分散が正で**, n **が大きい場合に検出力が高くなる傾向**
  ④～⑥の方法を用いても間違いではない

薬や治療の効果を測るためには

統計による因果効果の実証

プラシーボ(偽薬)効果の除去

- 実際に薬は飲んでいないのに, 健康を感じる効果

  プラシーボ効果は人によってはかなり大きい

2重盲検法(ダブルブラインド)

- 医師・患者以外の第三者がテストを実施
- 患者を2グループに分ける

  処置群　あるグループには新薬の入ったカプセル

  対照群　別のグループには水の入ったカプセル

- 医師も、患者がどちらのグループに属するか知らされない

  ⇒　観察者バイアスの除去