統計学入門
～正規母集団の区間推定～

2025年度1学期:　　月曜2限

担当教員:　　　　石垣　司

推定

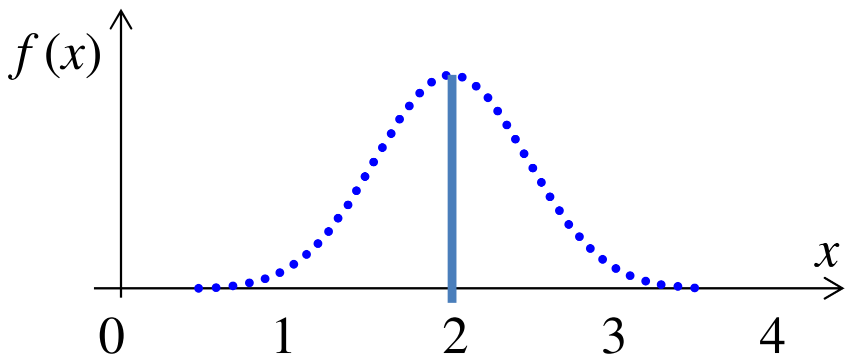
標本から母集団の分布のパラメータ(母数)を求める

- **点推定**: 未知のパラメータ θ を1点で推定
- **区間推定**: 未知のパラメータ θ が存在する区間を推定

- データ(標本の実現値)を利用して未知 θ の値を推定

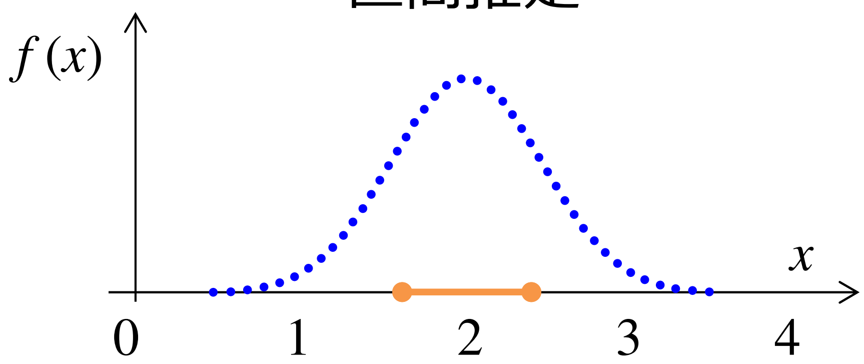
  例: データ $\{2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 2\}$ から母集団の母平均を推定

点推定



$\hat{\theta} = 2$

区間推定



$P(1.7 \leq \hat{\theta} \leq 2.3)$

正規母集団の区間推定

正規母集団の母平均・母分散を区間推定

- 正規母集団以外の母集団は, n が大きい場合,
  標本平均を中心極限定理で正規分布に近似できる
- 信頼区間による推定

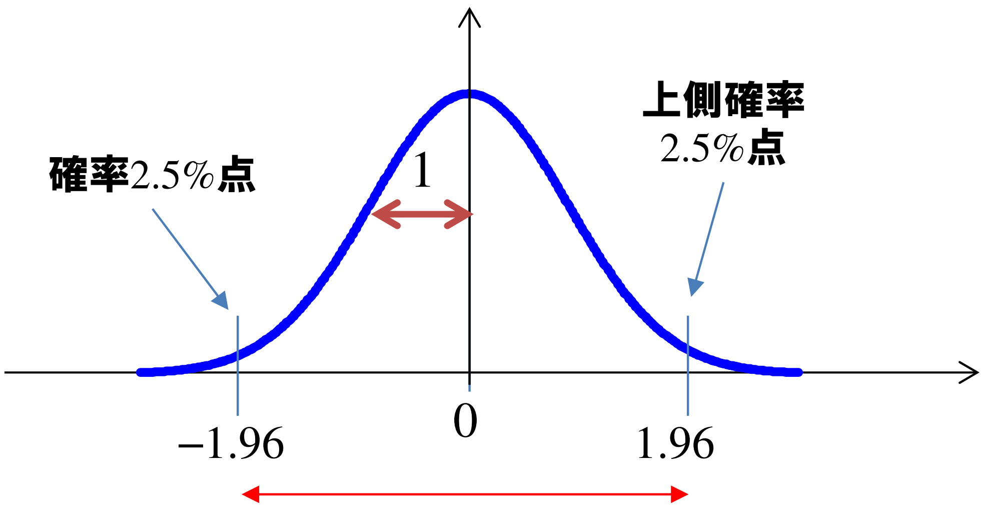
講義内容の整理（正規母集団に限定）

- ① 母分散が既知の場合の母平均の区間推定
- ② 母分散が未知の場合の母平均の区間推定
  t 分布、カイ2乗分布
- ③ 正規母集団の母分散の区間推定

（復習）標準正規分布の上側確率点と信頼区間

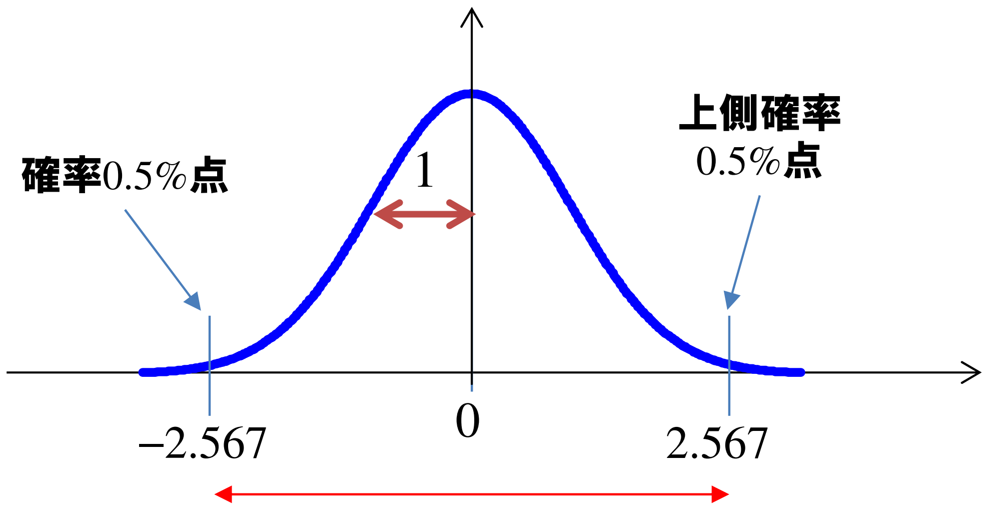
Z_α：標準正規分布の上側確率 $100 \times \alpha\%$点

- 97.5%点（上側確率2.5%点） $Z_{0.025} = 1.96$
- 2.5%点 $Z_{0.975} = -Z_{0.025} = -1.96$
- 99.5%点（上側確率0.5%点） $Z_{0.005} = 2.567$
- 0.5%点 $Z_{0.995} = -Z_{0.005} = -2.567$



この区間の確率（面積）0.95

$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$



この区間の確率（面積）0.99

$P(-2.567 \leq Z \leq 2.567) = 0.99$

①正規母集団の母平均の区間推定（母分散既知）

例：母平均 μ の95%信頼区間(復習)

- 標準化した標本平均 $\bar{Z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$P(-1.96 \leq \bar{Z} \leq 1.96) = 0.95$$

$$P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

- σ の値は既知なので信頼区間は計算可能

ただし，多くの実データの分析において，平均が未知で分散が既知という状況は考えにくい

②正規母集団の母平均の区間推定（母分散未知）

“母分散 σ^2 は既知”の条件は現実的ではない
$\Rightarrow$ 母分散 σ^2 を標本分散 S^2 で代用

t 統計量

- **$\bar{Z}$ の中の σ を S で代用した統計量 T**

$$\bar{Z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

- **T の分布は標準正規分布ではない**

- **大標本 (サンプルサイズ n が $n \geq 30$ くらい)**
  $\Rightarrow$ 中心極限定理より T を標準正規分布で近似

- **小標本 ($n < 30$ くらい) $\Rightarrow$ t 分布**

小標本の区間推定に必要な確率分布

William Sealy Gosset
1876-1937
ギネスビール社員
“Student” はペンネーム

Student の t 分布 (1908)

- t 統計量の従う確率分布
- ビールの品質管理から誕生

  醸造器内の酵母数を標本抽出し顕微鏡で数えて厳密管理

  当初は $\sigma^2 = S^2$ としてビール品質の監視

  しかし, 小標本のとき, S^2 の値がおかしいと気付く

  $\bar{X}$ の信頼性評価に正規分布(with $\sigma = S/\sqrt{n}$)は不適の疑念をもつ
- ⇒小標本のときの S^2 の正しい見積もりが必要

カイ2乗分布 $\chi^2_{(n)}$

- 標本分散 S^2 に関連する確率分布

東京大学出版会「統計学入門」p.203コラム、D.サルツブルク「統計学を拓いた異才たち」第3章

χ^2分布

自由度 n のカイ2乗分布 $\chi^2_{(n)}$

- 確率変数 $Z_i \sim i.i.d. N(0,1)$ の2乗和 χ^2 の従う分布

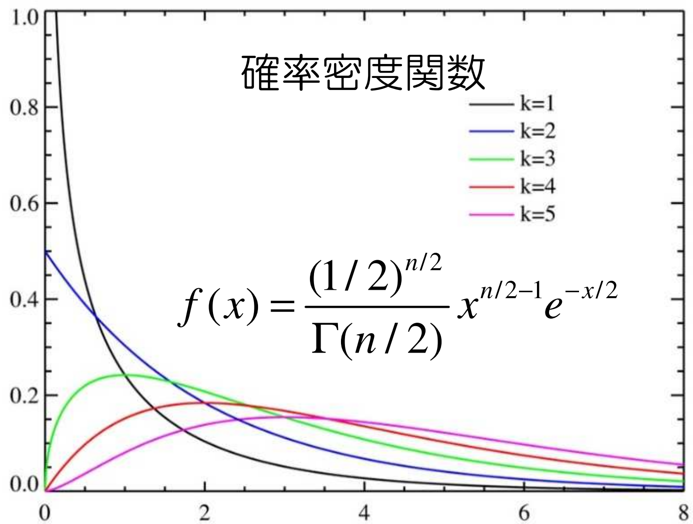
$$\chi^2 = Z_1^2 +, \ldots, +Z_n^2$$

- パラメータ　自由度 n（サンプルサイズ n に対応）
- 平均と分散　$E[\chi^2] = n, V[\chi^2] = 2n$
- 再生性をもつ

$X_i \sim \chi^2_{(n)}$ (自由度 n の χ^2分布)

$Y_i \sim \chi^2_{(m)}$ (自由度 m のχ^2分布)

$$X_i + Y_i \sim \chi^2_{(n+m)}$$



Wikipedia (public domain)

t 分布と χ^2 分布の関係

- t 統計量は, $\bar{Z}$ と χ^2 分布に従う確率変数の比
  - 標本 $X_i \sim i.i.d.N(\mu, \sigma^2)$ のとき U は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う

$$U = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$$

  - t 統計量

check!

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{U/(n-1)}}$$

← 標準正規分布

← 自由度 $n-1$ の χ^2 分布

標準正規分布に従う確率変数と χ^2 分布に従う確率変数の比
両者の密度関数の比から t 統計量の密度関数を生成

t 統計量が従う分布を自由度 $n-1$ の t 分布とよぶ

$U \sim \chi^2_{(n)}$ の証明は煩雑なため省略。興味のある人は、「高杉&馬場, 演習統計学キャンパス・ゼミ, マセマ出版社」の p.168 などを参照

t 分布

自由度 n の t 分布

- $Z \sim N(0,1)$, $W \sim \chi^2_{(n)}$, Z と W は独立のとき, t が従う分布

$$t = \frac{Z}{\sqrt{W/n}}$$

- パラメータ　自由度 n
- 平均と分散

$E[t] = 0,\ V[t] = \frac{n}{n-2}$ $(n > 2)$

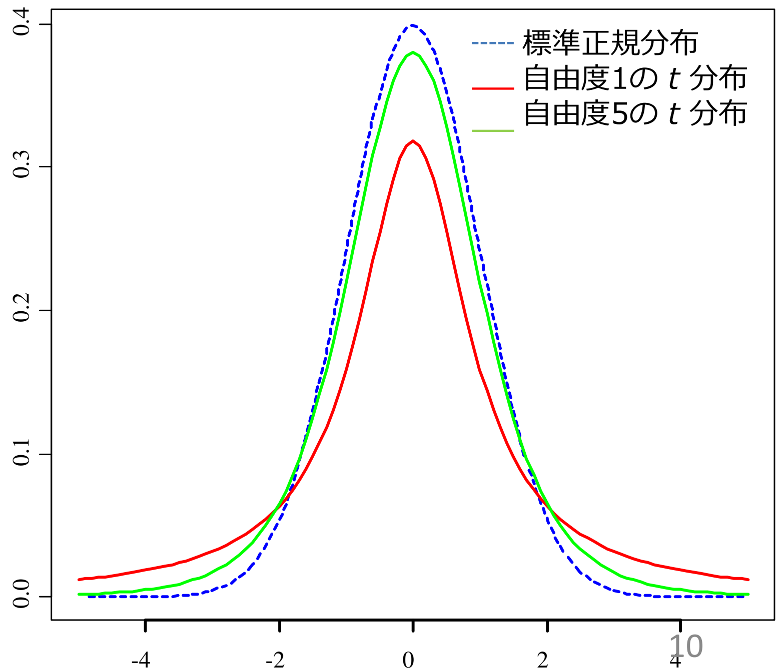
$n = 1$ のときコーシー分布

- 原点に対象
- 自由度 n が大きい時($n > 30$ くらい)
正規分布にほとんど一致

$n \to \infty$ の時, 正規分布

確率密度関数

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}(1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$



②正規母集団の母平均の区間推定（母分散未知）

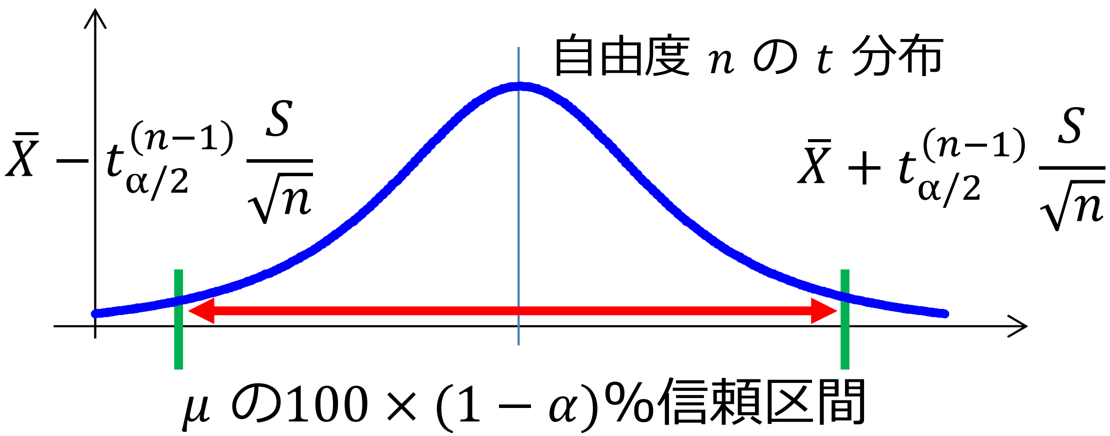
$t_{\alpha}^{(n-1)}$：自由度 $n-1$ の t 分布の上側確率 $100\times\alpha\%$ 点

- 例 / 自由度 $n-1$ の t 分布の上側 5% 点　$t_{0.05}^{(n-1)}$
- t 分布は対称 $t_{\alpha}^{(n-1)}=-t_{1-\alpha}^{(n-1)}$

$100\times(1-\alpha)\%$信頼区間の計算には$t_{\alpha/2}^{(n-1)}$を使用

$$P\left(-t_{\alpha/2}^{(n-1)}\leq T\leq t_{\alpha/2}^{(n-1)}\right)=P\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}^{(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+t_{\alpha/2}^{(n-1)}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

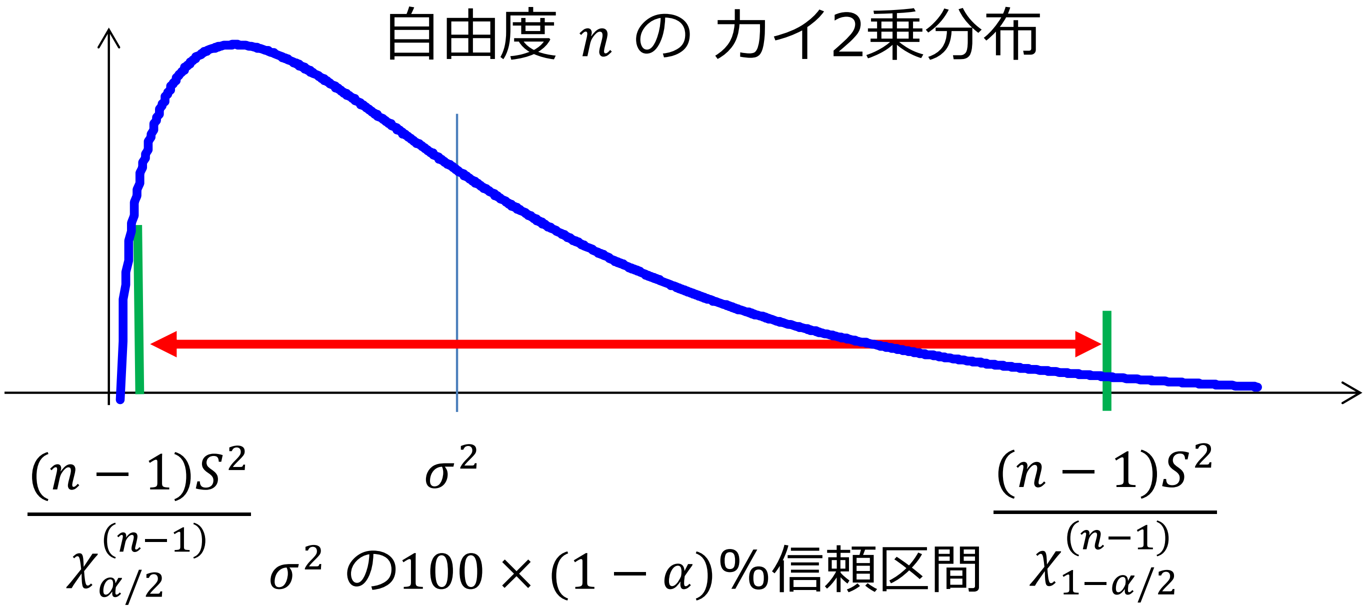
例 95%信頼区間の場合　$\alpha=0.05,\ 100\times(1-\alpha)=95,\ t_{\alpha/2}^{(n-1)}=t_{0.025}^{(n-1)}$



③正規母集団の分散の区間推定

$$U = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

- $\chi_{\alpha}^{(n-1)}$：**自由度** $n-1$ **の** χ^2**分布の上側**$100 \times \alpha\%$**点**
- $P\left(\chi_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \leq U \leq \chi_{\alpha/2}^{(n-1)}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^{(n-1)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^{(n-1)}}\right)$



演習問題 #1

東証株価指数(TOPIX)**の日次収益率は正規分布に従うと仮定する**

$t_{0.025}^{(3)} = 3.18$, $t_{0.025}^{(4)} = 2.78$, $t_{0.05}^{(3)} = 2.35$, $t_{0.05}^{(4)} = 2.13$, $Z_{0.025} = 1.96$, $Z_{0.05} = 1.65$, $\chi_{0.025}^{(3)}$=9.35, $\chi_{0.025}^{(4)}$=11.14, $\chi_{0.05}^{(3)}$=7.18, $\chi_{0.05}^{(4)}$=9.49, $\chi_{0.975}^{(3)}$=0.22, $\chi_{0.975}^{(4)}$=0.48, $\chi_{0.95}^{(3)}$=0.35, $\chi_{0.95}^{(4)}$=0.71

1. **直近の**4**日間の日次収益率は** $\bar{X} = 0, S^2 = 1$ **であった。母平均** μ **の**95%**信頼区間を求めなさい**

2. **このとき**, **母分散** σ^2 **の**95%**信頼区間を求めなさい**

3. **約**1**年間**(256**日**)**の日次収益率は** $\bar{X} = 0, S^2 = 1$**であった。母平均** μ **の**95%**信頼区間を求めなさい**

演習問題 #2

東証株価指数(TOPIX)の日次収益率は正規分布に従うと仮定する

$t_{0.025}^{(8)} = 2.31$, $t_{0.025}^{(9)} = 2.26$, $t_{0.01}^{(8)} = 2.90$, $t_{0.01}^{(9)} = 2.82$, $t_{0.005}^{(8)} = 3.36$, $t_{0.005}^{(9)} = 3.25$, $\chi_{0.01}^{(8)} = 20.09$, $\chi_{0.01}^{(9)} = 21.67$, $\chi_{0.005}^{(8)} = 21.96$, $\chi_{0.005}^{(9)} = 23.59$, $\chi_{0.99}^{(8)} = 1.65$, $\chi_{0.99}^{(9)} = 2.09$, $\chi_{0.995}^{(8)} = 1.34$, $\chi_{0.995}^{(9)} = 1.74$

1. 直近の9日間の日次収益率は $\bar{X} = 0, S^2 = 1$ であった。母平均 μ の99%信頼区間を求めなさい
2. このとき, 母分散 σ^2 の99%信頼区間を求めなさい