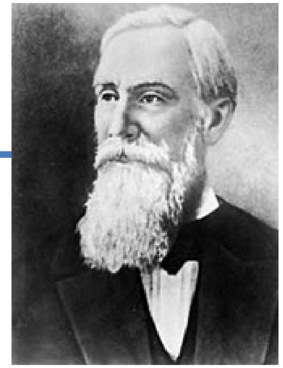
統計学入門
～標本平均の性質(3つの定理)～

2025年度1学期：　　月曜2限

担当教員：　　　　　石垣　司

チェビシェフの不等式



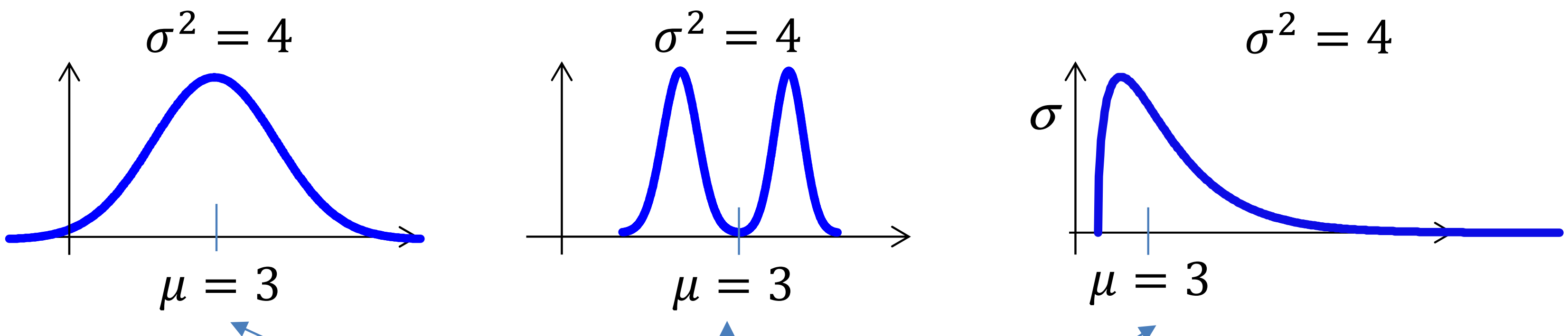
Пафну́тий Льво́вич
Чебышёв
(1821-1894)

<u>任意の確率分布</u>のある範囲内の確率の下限

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$ check!

- 平均 μ, 分散 σ^2 の確率分布(μ, σ^2 は有限)に従う確率変数 X が平均 μ から $k\sigma$ 以上ズレて出現する確率は $1/k^2$ 以下となる

- 分布の形が異なっていても上の不等式は成立

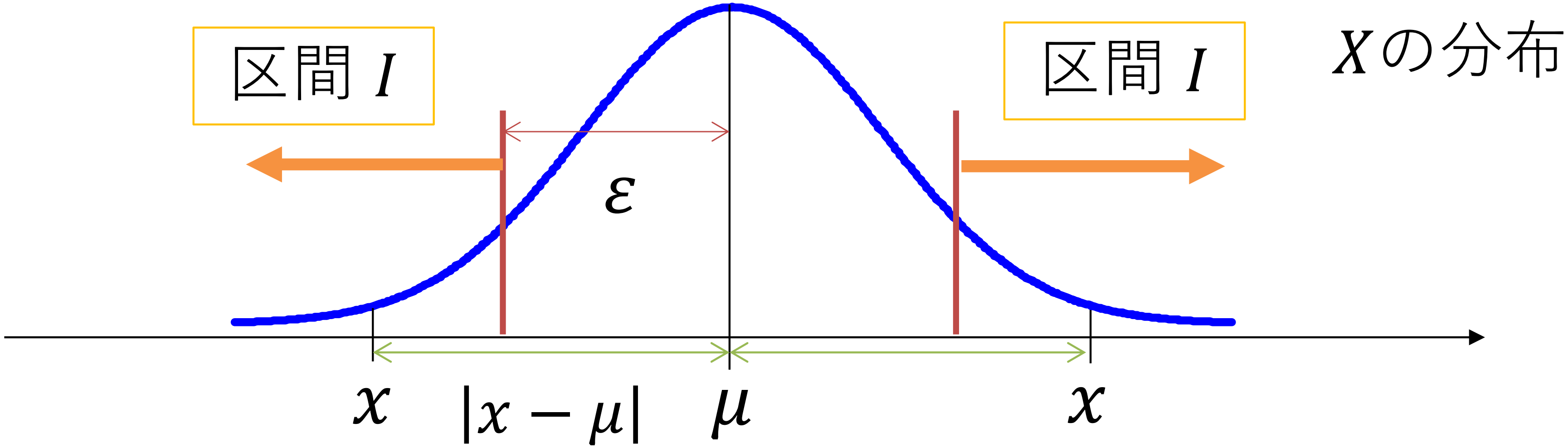


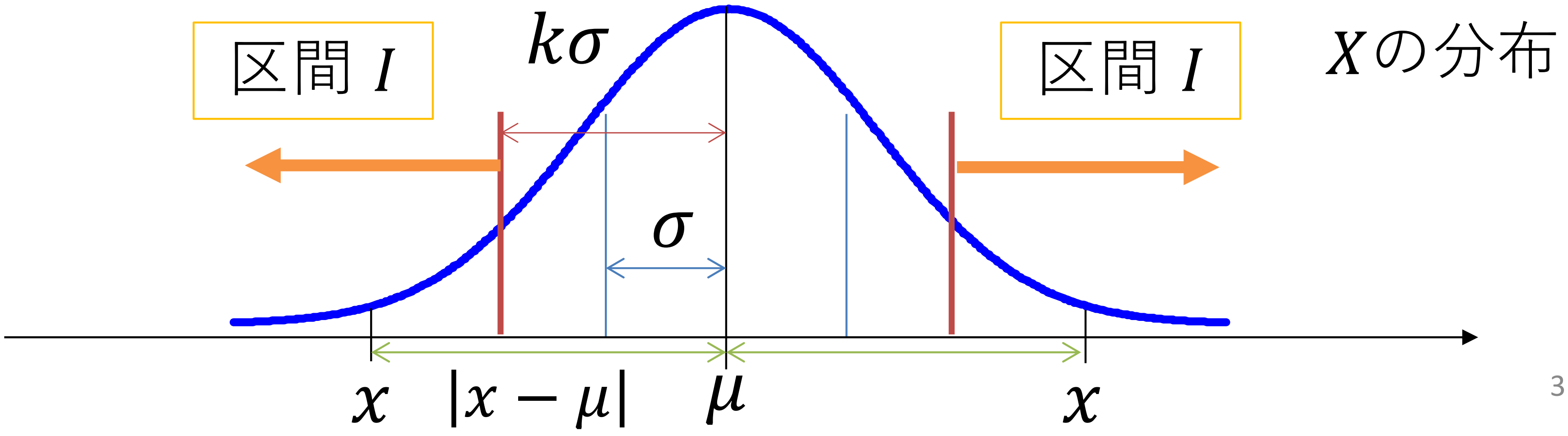
$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

チェビシェフの不等式の証明の補助図

区間 I での確率を考える

ε : **任意の正の定数, 区間** $I = \{|x-\mu| \geq \varepsilon\}$





チェビシェフの不等式の応用

例題

1. 平均 0, 分散 1 の任意の確率分布で, 確率変数が $-2 \leq X \leq 2$ となる確率の下限(最低値)を求めよ
2. 平均 0, 分散 1 の正規分布で, 確率変数が $-2 \leq X \leq 2$ となる確率を求めよ
3. 例題1と2の結果を比べ, その違いを議論せよ

問題

– ある新聞社が今までに発行した新聞内の各記事の文字数は平均が1000文字, 標準偏差200であった。このとき, ある一つの記事を抜き出したとき, 文字数が400文字以下, または1600文字以上となる確率の最大値を求めよ

大数の法則

統計的推測の根幹となる定理

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

check!

標本平均に対するチェビシェフの不等式

Jakob Bernoulli
(1654-1705)

- サンプルサイズ n が無限大に近づくと, $\bar{X}$ は μ に限りなく近づくことを数学的に保証

  （より正確な意味） 母平均と母分散が有限であれば, n を無限大に近づけていくことで, 標本平均 $\bar{X}$ と母平均 μ のズレの大きさが ε よりも大きくなる確率は 0 である

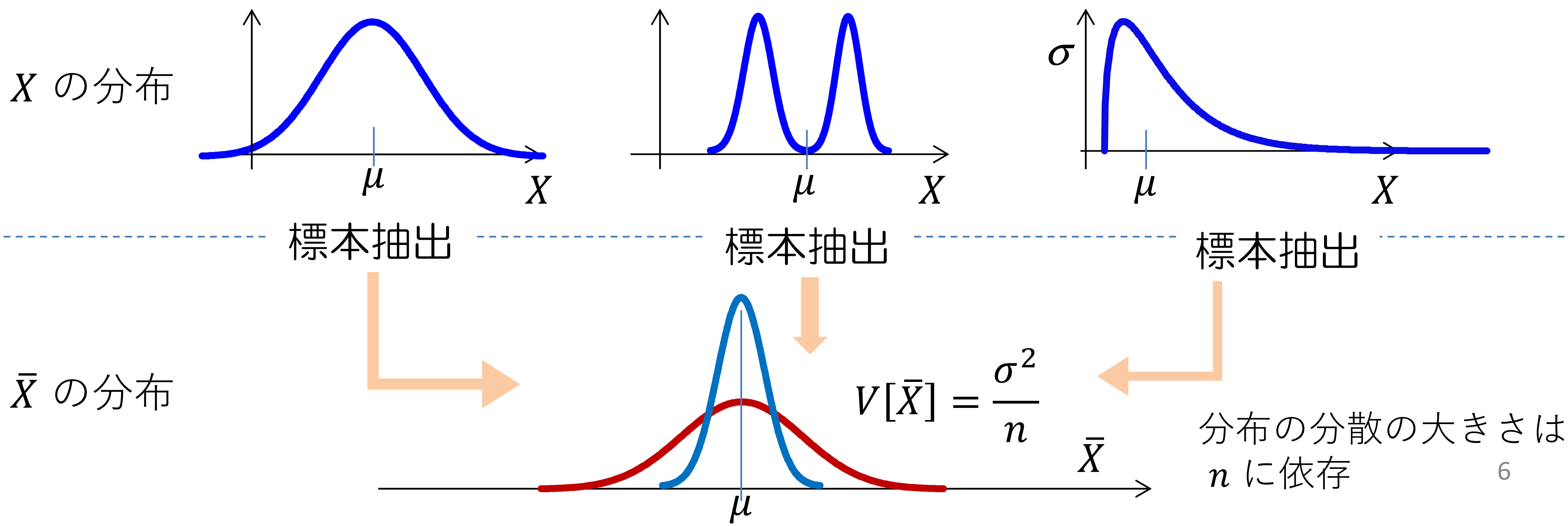
- 統計的確率と数学的確率の一致

  例　サイコロを無限回投げ続ける（統計的確率）と 1 の目の出る割合は、理論値の $1/6$（数学的確率）に一致する

中心極限定理

<u>任意の確率分布</u>(平均μ, 分散σ^2は有限)の標本平均の分布は,
サイズnが十分大きい時$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$に近似できる

統計学の定理の中で最も重要かつ非自明な定理の一つ
積率母関数(モーメント母関数)による証明 check!



中心極限定理のシミュレーション

- **確率分布**(一様分布、指数分布、ベルヌーイ分布)**から** $n = \{1,5,10,50\}$ **の標本を**1000**回抽出。その標本平均値** $\bar{x}$ **のヒストグラム**

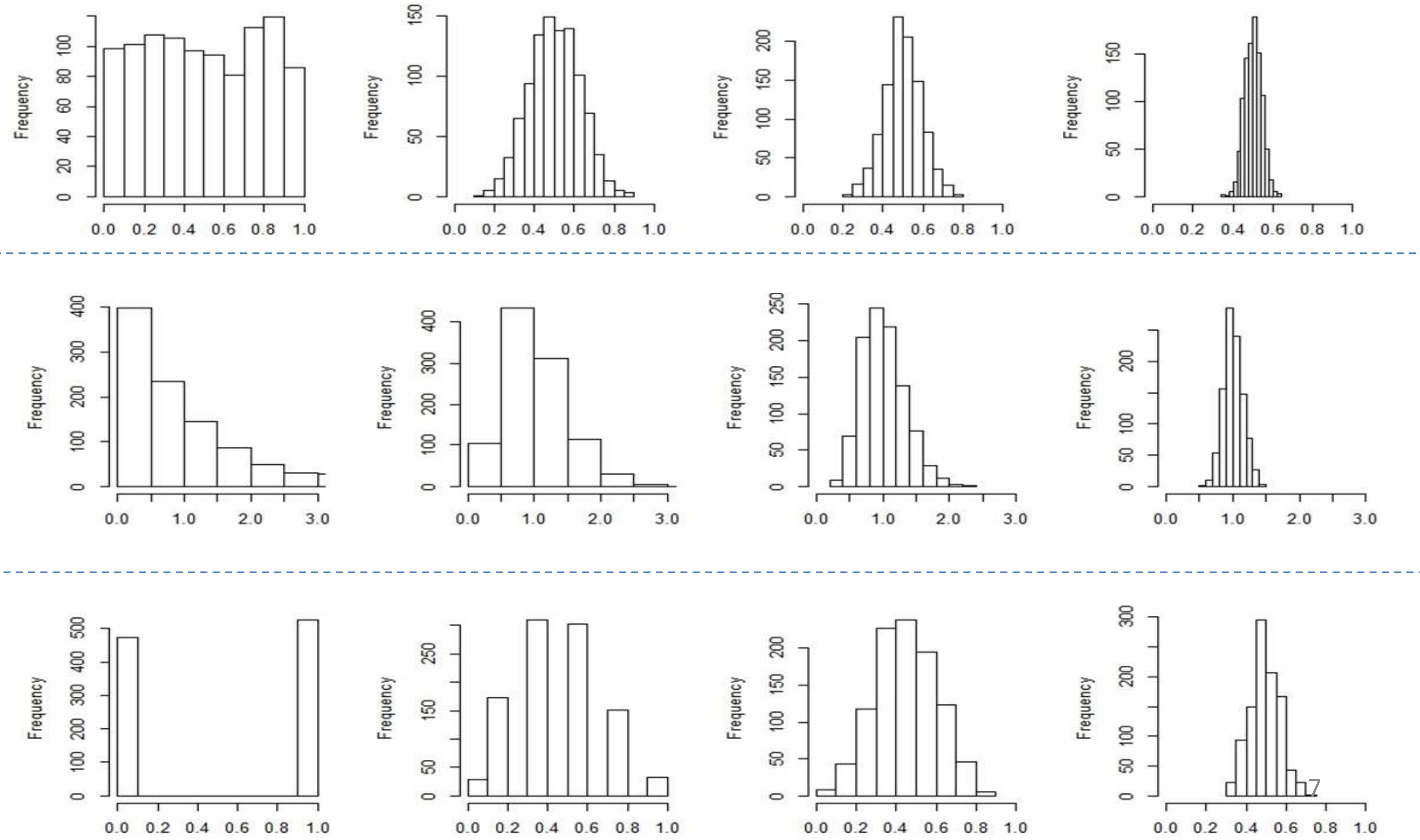
Practice!

$n = 1$　$n = 5$　$n = 10$　$n = 50$

一様分布
[0, 1]

指数分布

ベルヌーイ分布
$(p = 0.5)$



中心極限定理の応用

問題

– サイコロを 18000 回投げ, 1 の目が 2850 回出た。その数は理論値よりも 150 回小さい。その誤差は許容できるか？

1の目の出る回数 $X = X_1+, \ldots, +X_n$ は二項分布でモデル化できる

$$P(X \leq 2850) = \sum_{x=0}^{2850} {}_{18000}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{18000-x}$$

$X_i \sim Bel(p = 1/6), E[X_i] = p, V[X_i] = p(1-p)$

– $\bar{X}$ をベルヌーイ試行の標本平均($\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1+, \ldots, +X_n)$)と考え, 中心極限定理より正規分布で近似する。このとき, $P(X \leq 2850)$ となる確率を求めよ

標準正規分布表より $P(Z \geq 3) = 0.00135$を用いる

補足：積率母関数（モーメント母関数）#1

原点周りの m 次の積率を生成する関数

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

- 積率（モーメント）(期待値が存在する場合)

  1次の積率：平均, 2次の積率：分散, 3次の積率：（標準化）歪度, ・・・

  全ての次数の積率がわかれば, 確率分布の形もわかる

- 確率分布と1対1の関係

  例：正規分布 $N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow M_X(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

  - ただし, 積率母関数が存在しない分布もある。例：コーシー分布

- 積率母関数のマクローリン展開

$$M_X(t) = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \cdots$$

補足：積率母関数（モーメント母関数）#2

中心極限定理の証明

- 標準化した標本平均 $\bar{Z}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ の積率母関数 $M_{\bar{Z}}(t)$

$$\lim_{n\to\infty} M_{\bar{Z}}(t)=\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$ check!

$n\to\infty$ のとき, $M_{\bar{Z}}(t)$が標準正規分布の積率母関数に一致

正規分布の和の再生性の証明

- $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$で X_1 と X_2 は独立のとき, $Y=X_1+X_2$の積率母関数 $M_Y(t)$

$$M_Y(t)=\exp\left\{(\mu_1+\mu_2)t+(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{t^2}{2}\right\}$$ check!

$M_Y(t)$ が正規分布$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$の積率母関数に一致

演習問題

コインを 10000 回投げたとき表の出る回数 X が5150回以上となる確率 $P(X \geq 5150)$ を中心極限定理による近似を用いて求めよ