統計学入門
～標本平均～

2025年度1学期：　　月曜2限

担当教員：　　　　　石垣　司

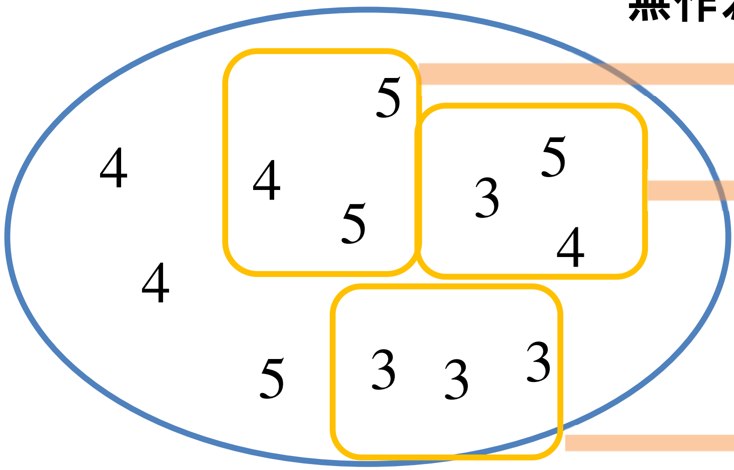
標本分布

標本から計算される代表値(など)が従う確率分布

- 例: $\mu = 4$ の母集団から $n = 3$ の標本抽出

  抽出される標本は確率的に決まる

無作為抽出



母集団(母平均 $\mu = 4$)

標本平均値 $\bar{x} = 4.66$

標本平均値 $\bar{x} = 4.00$

⋮

標本平均値 $\bar{x} = 3.00$

抽出された標本に依存して、実現値の値はばらつく

<u>標本平均値はある確率分布に従い発生する</u>

【これ以降の授業での設定】

- <u>標本 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ は確率変数</u>
- <u>標本は独立同一分布から無作為抽出</u>

  $\{x_1, \ldots, x_n\}$ は確率変数の実現値(観測値・データ)

用語の整理

独立同一分布(i.i.d.)

- 標本 $\{X_1, \dots, X_n\}$ の各 X_i は独立である
- 標本 $\{X_1, \dots, X_n\}$ は同一の母集団から抽出

母平均, 母分散

- 母集団の平均 μ と分散 σ^2

統計量(statistic)

- 標本から目的の値を計算する関数 $T(X_1, \dots, X_n)$

  統計量自体も確率変数

- 例： 標本平均の統計量　$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

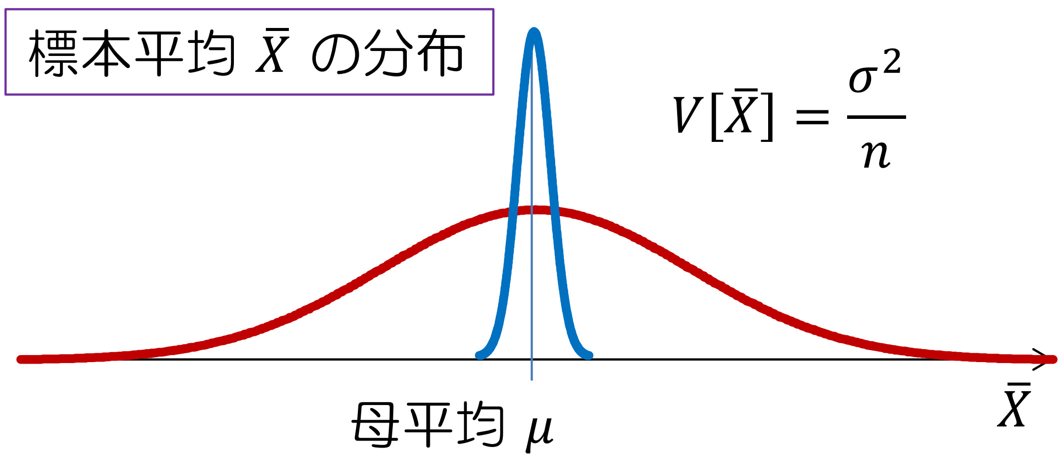
標本平均の分布

標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\bar{X}$ **は確率変数（サンプルサイズ** n **の標本抽出を**1**回の試行とみなすと,**
試行ごとに標本平均の実現値は確率的に決まる）

標本平均の期待値 $E[\bar{X}] = \mu$ check!

標本平均の分散 $V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$ check!



n **が大きいと分散が小さい**
$|\mu - \bar{x}|$ **が小さくなる確率が高い**

n **が小さいと分散が大きい**
$|\mu - \bar{x}|$ **が大きくなる確率が高い**

標本の誤差の見積もり～信頼区間 #1

母集団が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ のときの標本平均

$$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

例：正規母集団の母平均 μ の95%信頼区間

$$\left[\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

check!

- **標準誤差**(SE)：**標本平均の分布の標準偏差** $\sqrt{V[\bar{X}]}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- "1.96×**標準誤差**"**で誤差の大きさを見積もり**

$$P(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$$

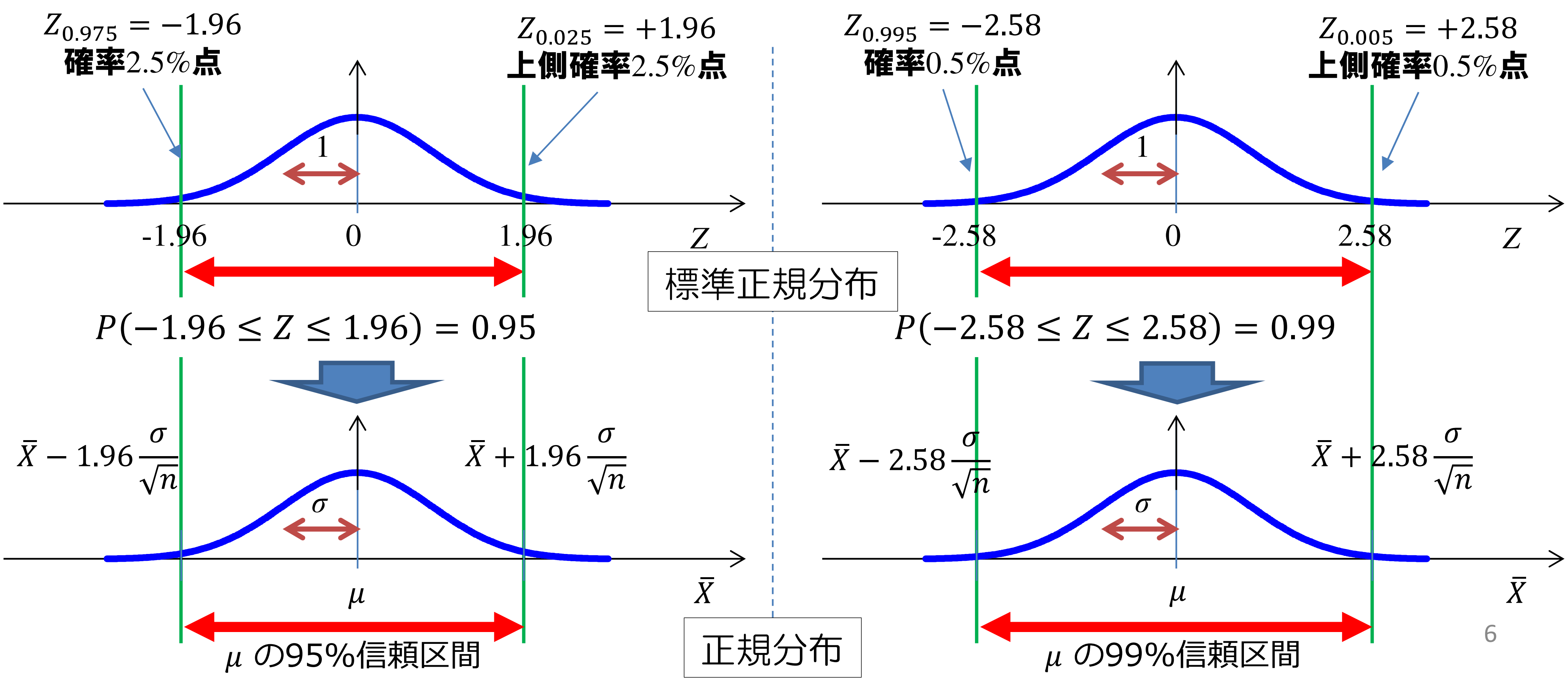
数値1.96**は標準正規分布表より求まる**

標本の誤差の見積もり～信頼区間 #2

95%信頼区間

Z_α：標準正規分布の上側確率 $100 \times \alpha$%点

– サンプルサイズ n の標本抽出を100回繰り返したら場合, 約95回はその区間$\left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$の中に μ が含まれる

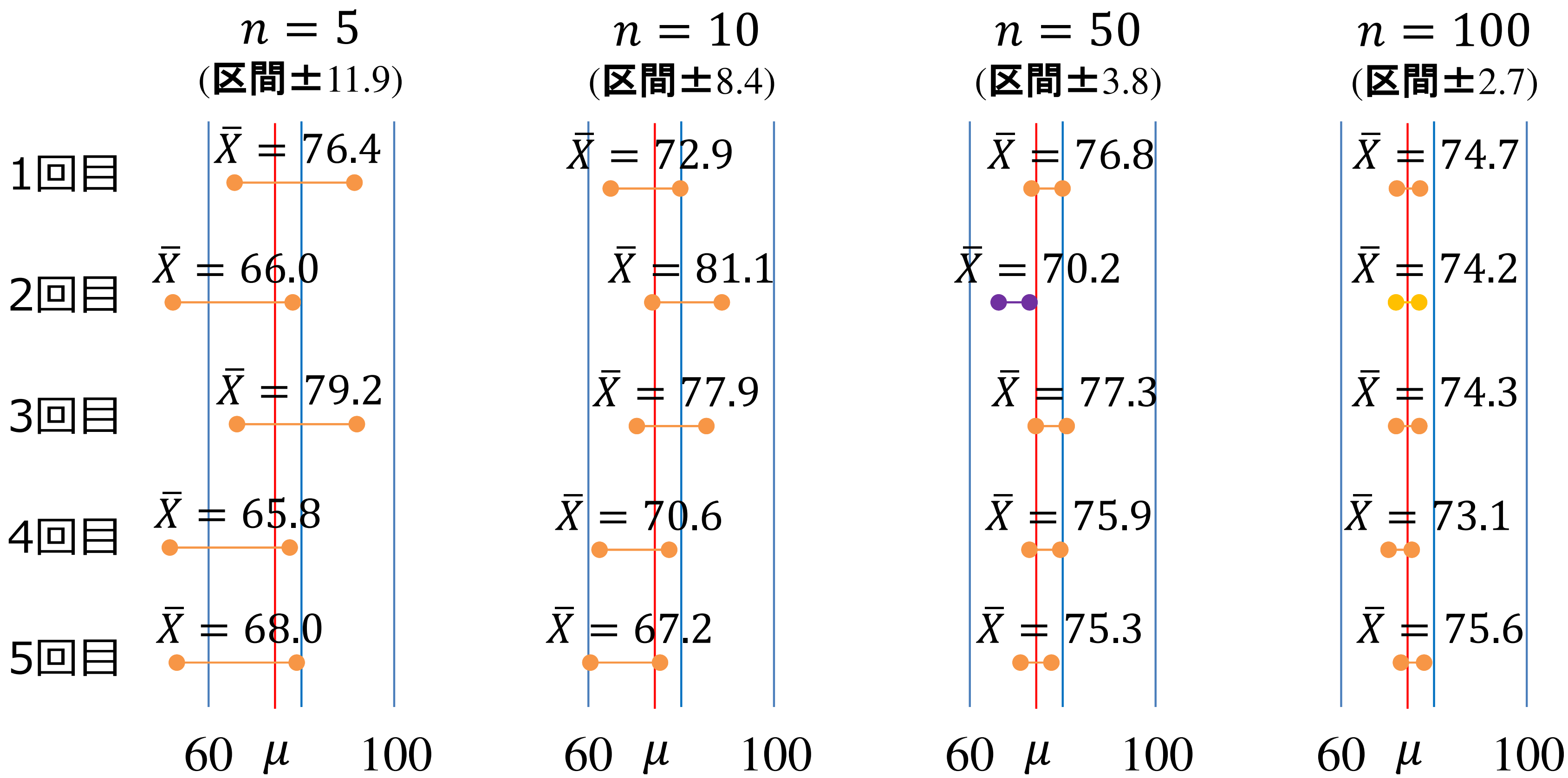


標本の誤差の見積もり～信頼区間 #3

例：統計学の授業の成績(2015年度)の平均点の信頼区間

試験受験者数 $N = 277$, 母標準偏差 $\sigma = 13.5$, 正規母集団を仮定

復元抽出したサイズ n の標本から各5回, 95%信頼区間を算出



標本の誤差の見積もり〜信頼区間 #4

95%信頼区間(μ に関する標本平均)の意味・解釈

- 【正】サイズ n の標本抽出を100回繰り返した場合, 約95回はその区間の中に μ が含まれる

- 1つのサイズ n の標本から計算された95%信頼区間を考える
- 【誤】その区間の中に μ が95%の確率で出現する
  母平均 μ は定数である(確率変数ではない)
- 【正】確率95%で, その区間は μ を含む
  より正確には「その区間は μ を含む or 含まないのどちらかであり, “μ を含む”という事象が生じる確率は95%である」

- 【誤】その区間の中心ほど, μ に近い可能性が高い

有限母集団における比率調査

例：TV視聴率は“見ている” or “見ていない”の比率

- 地域世帯数は既知。どのくらいの家庭での視聴状況を調べれば, 信頼できる数値が分かるか？

ベルヌーイ分布 $\mathrm{Bel}(p)$ でモデル化

- サイズ N の有限母集団からサイズ n の標本を非復元抽出

  p を母比率とよぶ

- 有限母集団の標本平均の期待値　$E[\bar{X}] = \mu$
- 有限母集団の標本平均の分散　$V[\bar{X}] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$
- 有限母集団修正　$c_N = \frac{N-n}{N-1}$　$(0 \leq c_N \leq 1)$

  有限母集団の $V[\bar{X}]$ < 無限母集団の $V[\bar{X}]$

  非復元抽出の方が μ を精度よく推定

例: TV視聴率調査の誤差 #1

TV視聴率調査の信頼区間

- 関東地区の総世帯数 $N = 20{,}125{,}319$ 世帯
- 関東地区の調査対象数 $n = 900$ 世帯
- 有限母集団修正 $c_N = 0.9999553 \fallingdotseq 1$
- 標準誤差 $SE = \sqrt{c_N \frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}$
- 95%信頼区間 $\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{900}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{900}}\right]$

ここで $\bar{X}$ は標本(データ)から計算された視聴率を意味する

世帯数　総務省住民基本台帳(2017年1月1日)より
調査対象数　ビデオリサーチ社HPより　ttps://www.videor.co.jp/tvrating/attention/index.html

例: TV視聴率調査の誤差 #2

TV視聴率調査の信頼区間

- サンプルサイズ $n = 900$ の標本から計算された比率 $\bar{X}$ ごとの95%信頼区間

標本平均 $\bar{X}$ データから計算した結果	5%	10%	20%	30%	40%	50%
95%信頼区間	3.6% ~ 6.4% (±1.4%)	8.0% ~ 12.0% (±2.0%)	17.4% ~ 22.6% (±2.6%)	27.0% ~ 33.0% (±3.0%)	36.8% ~ 43.2% (±3.2%)	46.7% ~ 53.3% (±3.3%)

- 信頼区間の幅は標本平均の値により異なる
- $p = 0.5$ ($\bar{X} = 50\%$)に近いほど信頼区間の幅(許容誤差)が大きい

比率調査のサンプルサイズ n の決め方

1. **信頼区間の水準**(90%, 95%, 99% など)**を決め**, **係数 α を標準正規分布表から求める**
   - **二項分布の正規近似を用いることで**, **比率調査の $\bar{X}$ の分布を正規分布で近似する**

   95%**信頼区間の場合**,**係数** $\alpha = 1.96$

2. **許容できる信頼区間の幅 $\pm r$ を決める**

   例 知りたい95%**信頼区間が** $\pm 3\%$ **のとき**, $r = 0.03$

3. **サンプルサイズ n を決める**

$$n = \frac{1}{r^2}\alpha^2 c_N p(1-p)$$

check!

   - **母比率 p に関する情報がない場合**, **信頼区間の幅が最大となる $p = 0.5$ を代入する**

演習問題

1. **仙台市のTV視聴率調査のサンプルサイズは200世帯とする。あるTV番組の視聴率が20%と算出されたとき，その視聴率の95％信頼区間を求めよ**

   仙台市の世帯数は $N = 532{,}654$（2022年4月1日）

   $n = 200$ **のときの有限母集団修正** $c_N = 0.99960 \cong 1$

   ここで、$1.96 \cong 2,\ c_N \cong 1, \sqrt{0.02} \cong 0.14$**として計算**

2. **仙台市の各世帯でのペット飼育率を調べたい。実際の飼育率に関わらず95%信頼区間の幅を** $\pm 2\%$ **以下とするためのサンプルサイズ** n **を答えよ**

   「実際の飼育率に関わらず」であるので，信頼区間の幅が最大となる $p = 0.5$ **を代入する**

世帯数　仙台市HP（2022年4月1日）より

調査対象数　ビデオリサーチ社HPより(2017年時に記載あり。現在では削除)