統計学入門 補助資料
～2変数間の確率変数～

2022年度1学期:　　月曜2限

担当教員:　　　　石垣　司

2変数間の離散型同時確率

同時確率：事象 A と B が同時に生じる確率

周辺確率：A or B の単独の事象が生じる確率

- 例：赤と青の2色のサイコロを投げる
- 事象 A「赤のサイコロが偶数の目がでる」
- 事象 B「青のサイコロが2以下の目がでる」

赤＼青	B (2以下)	B (3以上)	赤の周辺確率
A (偶数)	$P(A \cap B) = {}^{1}/_{6}$	$P(A \cap B^c) = {}^{1}/_{3}$	$P(A) = {}^{1}/_{2}$
A (奇数)	$P(A^c \cap B) = {}^{1}/_{6}$	$P(A^c \cap B^c) = {}^{1}/_{3}$	$P(A^c) = {}^{1}/_{2}$
青の周辺確率	$P(B) = {}^{1}/_{3}$	$P(B^c) = {}^{2}/_{3}$	1

2変数間の離散型同時確率関数

同時確率関数：同時確率の確率関数

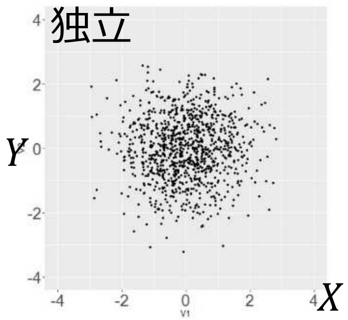
周辺確率関数：確率変数 X や Y の独自の確率関数

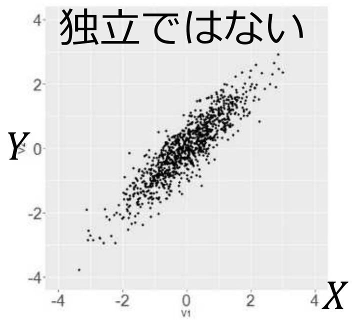
- 事象 A の確率変数　$X($ 赤=奇数 $) = 0$, $X($ 赤=偶数 $) = 1$
- 事象 B の確率変数　$Y($ 青=2以下 $) = 0$, $Y($ 青=3以上 $) = 1$
- P_X：X の周辺確率関数
- $P_{X,Y}$：X と Y の同時確率関数

$X \diagdown Y$	0	1	Xの周辺確率
0	$P_{X,Y}(0,0) = {}^{1}/_{6}$	$P_{X,Y}(0,1) = {}^{1}/_{3}$	$P_X(0) = {}^{1}/_{2}$
1	$P_{X,Y}(1,0) = {}^{1}/_{6}$	$P_{X,Y}(1,1) = {}^{1}/_{3}$	$P_X(1) = {}^{1}/_{2}$
Yの周辺確率	$P_Y(0) = {}^{1}/_{3}$	$P_Y(1) = {}^{2}/_{3}$	1

独立

変数 X と Y はお互いに影響を与えない関係にあること





独立

X / Y	表	裏
表	100	100
裏	100	100

独立

X / Y	表	裏
表	100	50
裏	100	50

独立ではない

X / Y	表	裏
表	200	100
裏	100	0

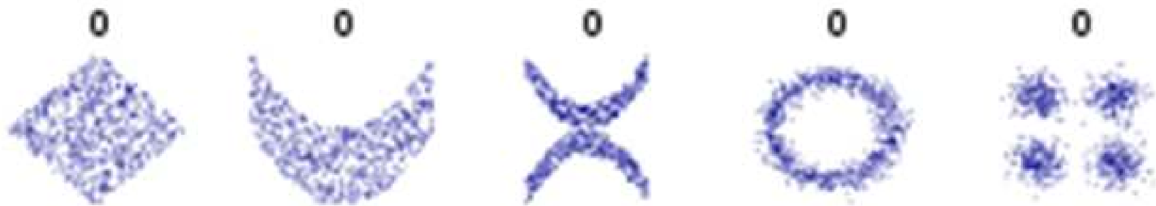
例：若年者層の割合(X)と婚姻率(Y)は非独立

例：青(X)と赤(Y)のサイコロの出る目は独立

独立と無相関

– **独立であれば無相関。無相関であっても独立とは限らない**

無相関で独立の例



無相関であるが独立ではない例

Wikipedia

独立のときの同時確率と条件付き確率

独立の定義

– 確率変数 X と Y の同時確率はそれぞれの確率の積に分解できるとき, X と Y は独立である

$$P(X,Y) = P(X)P(Y)$$

独立のときの条件付き確率

$$P(Y|X) = P(Y)$$

確率変数 X の取る値によって Y の確率は変化しない

– 2変数の同時確率関数の独立性の条件

$$p(0,0)p(1,1) = p(0,1)p(1,0)$$

X / Y	0	1
0	$p(0,0)$	$p(0,1)$
1	$p(1,0)$	$p(1,1)$

コリンズ裁判

(68 Cal. 2d 319, 438 P.2d 33, 66 Cal. Rptr. 497)

1964年米国カルフォルニアで強盗事件が発生

- 目撃証言による犯人の特徴がコリンズ夫妻に一致し逮捕
- 検察が裁判の立証の中で次の確率を(控えめに)算出

  一部が黄色の車 $\frac{1}{10}$, 口ひげの男 $\frac{1}{4}$, あごひげの黒人 $\frac{1}{10}$,
  ポニーテールの女 $\frac{1}{10}$, ブロンドの女 $\frac{1}{3}$, 車の異人種のカップル $\frac{1}{1000}$

  ※コリンズ夫妻の特徴は上のすべてに当てはまる

- 「確率の乗法定理から, 目撃証言のすべての特徴に一組の夫妻が一致する確率は(控えめに見ても)1/1200万」 ⇒ 有罪判決

問題: 確率論の観点から立証の間違えを指摘しなさい

確率変数の共分散と相関係数

確率変数 X と Y の共分散

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- 確率変数間の共変動の大きさ
- 確率変数 X と Y が独立のとき $Cov[X,Y] = 0$

確率変数 X と Y の相関係数

$$\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$$

- 確率変数 X と Y が独立のとき $\rho = 0$
- 値の範囲　$-1 \leq \rho \leq 1$

2つの確率変数の期待値

和の性質

- 平均　$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$
- 分散　$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y]$

共分散の性質

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$$
$$Cov[aX,bY]=abCov[X,Y]$$

X と Y が独立のとき

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]$$
$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

問題： $V[X]=2, V[Y]=1, Cov[X,Y]=-1$**のとき**
$V[3X+2Y]$ **の値を求めなさい**

ファイナンス理論への応用

例：証券の分割投資(ポートフォリオ)の最適化

– 株式 x と株式 y に10億円を分割投資し「安全」に運用したい

株式 x と y の価格は確率変数 (X, Y)

株式 x の期待収益率$(E[X])$, リスク$(V[X])$

株式 y の期待収益率$(E[Y])$, リスク$(V[Y])$

確率変数 X と Y の相関係数 ρ（通常は負の相関がある x と y を選ぶ）

– 「安全」の意味　株式価格の分散の最小化

$$W = tX + (1 - t)Y$$

t：分割率　$(0 \leq t \leq 1)$

– 最適なポートフォリオ
W のリスク$(V[W])$が最小となる分割率 t による
株式 x と株式 y の分割投資

ファイナンス理論への応用～演習問題

1. ポートフォリオの期待収益率$E[W]$を$t, E[X], E[Y]$を用いて表せ
2. ポートフォリオのリスク$V[W]$を$t, V[X], V[Y], \rho$を用いて表せ
3. リスク$V[W]$を最小化するtを求めよ
   ※ヒント　最小二乗法を用いる（$V[W]$はtの2次式となる。$V[W]$をtで微分し, その値が0となる点が最小点）
4. $V[X] = 1, V[Y] = 4, \rho = -0.5$とするとき, tと$V[W]$の値を求めよ

演習問題

2つの確率変数 X と Y を考える。また, $V[X] = V[Y] = \sigma^2$ であるとする。ここで,

$$A = X + Y, \quad B = X - Y$$

とするとき, $Cov[A, B]$ の値を求めなさい