統計学入門
～期待値～

2025年度1学期:　　月曜2限

担当教員:　　　　　石垣　司

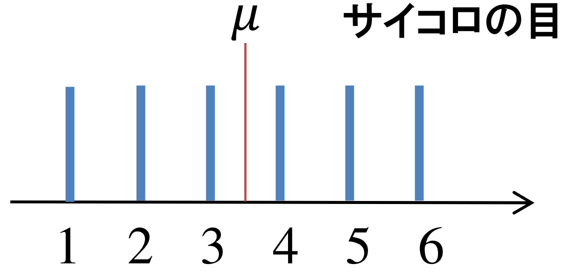
確率変数の期待値（確率分布の平均 μ）

確率分布の中心（正確には重心）の位置を表す値

離散確率分布の平均

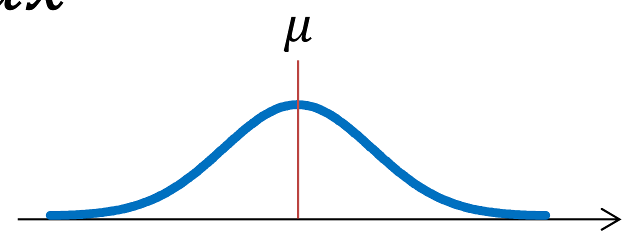
※高校数学で学習済み

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i)$$



連続確率分布の平均

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$



確率変数の関数の期待値

確率分布の特徴となる平均や分散などの指標の計算を一般化

離散確率分布の期待値

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{m} g(x_i)p(x_i)$$

連続確率分布の期待値

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

確率分布の分散 σ^2

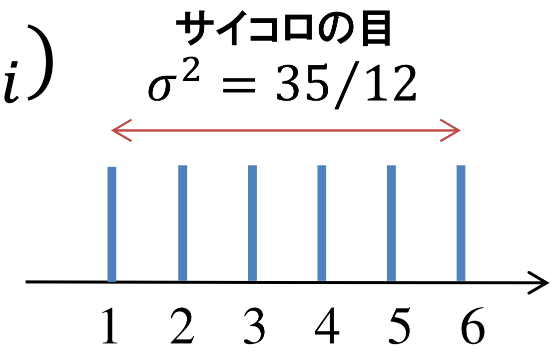
確率分布のばらつき（平均からのズレ）を表す指標

- $g(X) = (X-\mu)^2$ の期待値が分散

#メモ　直観的には $g(X) = |X-\mu|$ の方が理解しやすいが、絶対値よりも2乗の方が数学的な性質がよいため、このように定義される

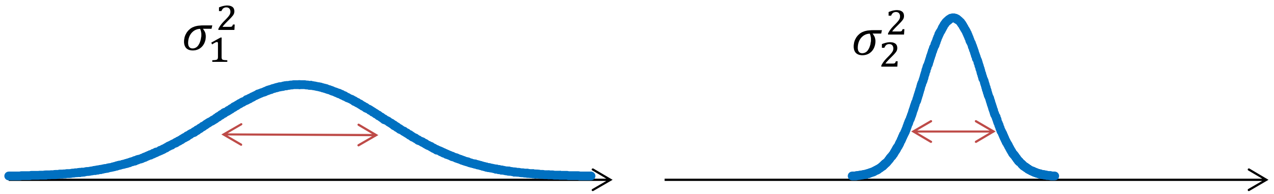
離散確率分布の分散 σ^2

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 p(x_i)$$



連続確率分布の分散 σ^2

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$



$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

期待値計算の性質

定数の期待値（a, b は定数）

$$E[a] = a$$

線形性

$$E[ag_1(X) + bg_2(X)] = aE[g_1(X)] + bE[g_2(X)]$$

分散の分解

check!

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

確率変数の1次式の分散

check!

$$V[aX + b] = a^2 V[X]$$

演習問題

1. **ベルヌーイ分布の平均と分散を求めよ**
   - **確率関数** $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$

2. **区間** $[a,b]$ **の一様分布の平均と分散を求めよ**
   - **確率密度関数** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \le x \le b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}$

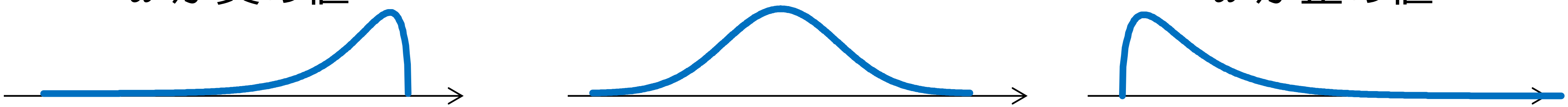
確率分布の歪度と尖度

歪度：確率分布の非対称性の指標

– 値が正(負)なら右(左)裾が長い。値がゼロなら左右対称

$$\alpha = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}$$

α が負の値　　$\alpha = 0$　　α が正の値

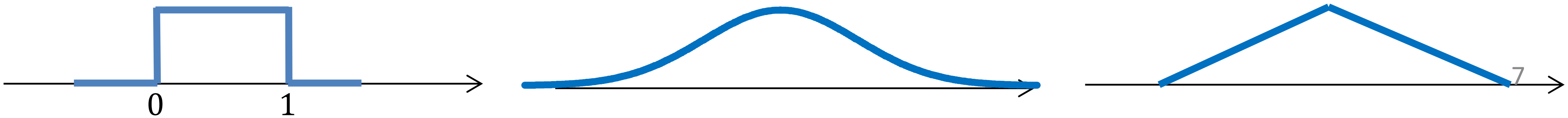


尖度：確率分布の中心の尖り具合の指標

$$\beta = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}$$

#メモ　正規分布の尖度は3となる。正規分布の尖度を 0 とする定義($\beta = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4} - 3$) もある

$\beta = 1.8$　　$\beta = 3$　　$\beta > 3$



確率分布の形を決める量

確率変数の n **乗の期待値** $E[X^n]$ **が確率分布の形を決めている**

- $\mu = 0$ **のとき**, **分散** $E[X^2]$, **歪度** $\sigma^{-3}E[X^3]$, **尖度** $\sigma^{-4}E[X^4]$
- **期待値** $E[X^n], (n = 1, \cdots, \infty)$ **がすべて決まれば**, **確率分布の形が決まる**

確率変数 X **のモーメント母関数(積率母関数)**

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

- **関数** $g(X) = X^n$ **の** $n = 1, \cdots, \infty$ **の期待値を作り出す関数**
- **確率変数** X, Y **のモーメント母関数が一致するならば**, X, Y **の確率分布も一致する**

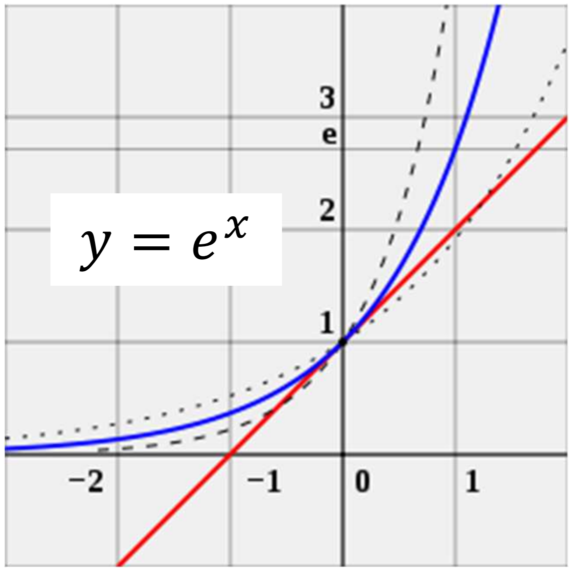
  この証明は本授業の範囲を超えるため省略（複素積分やラプラス変換が必要）

補足：自然対数の底（ネイピア数）e

解析学（微分積分）で最も重要な数の一つ

- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ となる定数 e をネイピア数とよぶ
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\cdots$（$e$ は無理数）
- $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + C$ ：自然対数の底
- 表記法：$e^x = \exp(x)$

- 補足：オイラーの公式 $e^{i\pi}+1=0$
  最も美しいと言われる数式の一つ



Wikipedia より
(public domain)

指数関数のテイラー展開

関数 $f(x)$ の $x = a$ における多項式による近似

– 関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む区間で無限回微分可能であり, かつ, $\lim_{\Delta x \to 0} R_n = 0$のとき、

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + R_n$$

※ $a = 0$ のときのテイラー展開をマクローリン展開とよぶ

指数関数のテイラー展開（マクローリン展開）とモーメント母関数

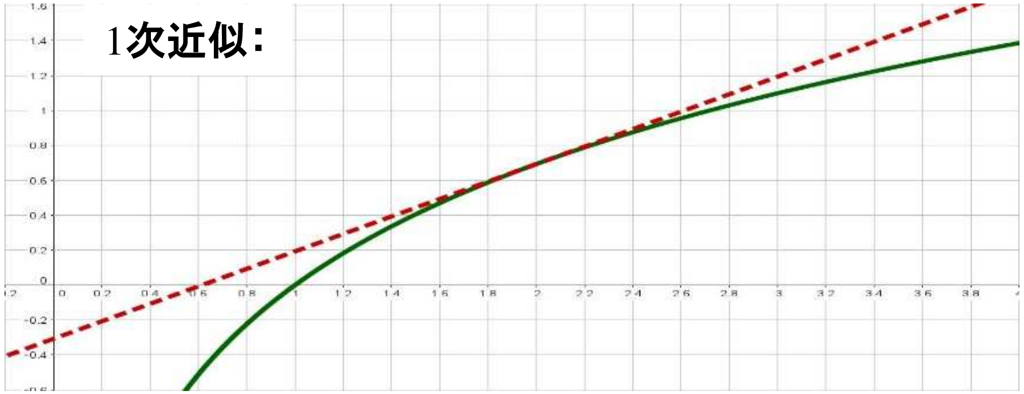
$$f(t) = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

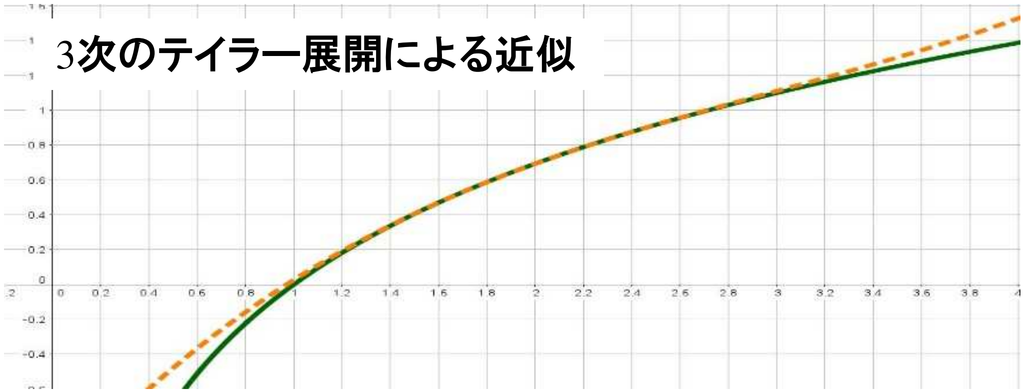
$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \cdots$$

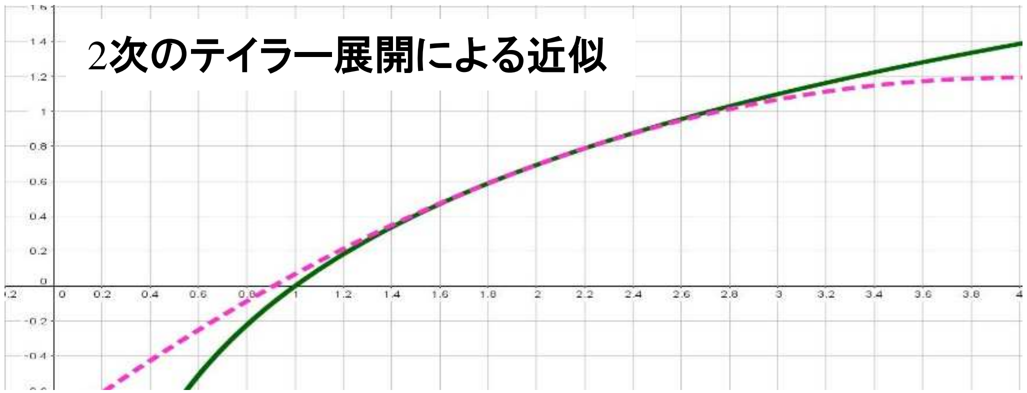
補足：テイラー展開による関数近似の例

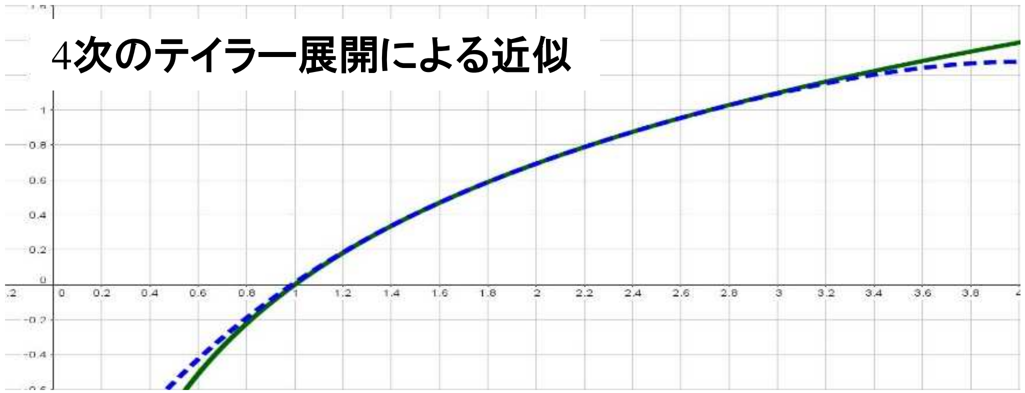
例：$\log(x)$ の $x = 2$ における近似

– 1次以上の多項式で近似 ⇒ 近似精度UP









演習問題

次の確率分布の平均と分散を求めよ

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 6x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases}$$

- ※**ヒント　分散は, 分散の分解を使うと便利**