1 自然対数

① 対数 $\log_x Q = P$ など
　　　　底

底が e のもの＝自然対数 $\log_e$
→ $\ln$ とかく
　↑natural

e とは？　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \fallingdotseq 2.718\cdots$ 「ネイピア数」(無理数)

② 自然対数のメリット → e の特徴がいかせる：e^x を微分すると e^x となる
つまり $de^x/dx = e^x$ でかわらない。

証明

$f(x)=e^x$ とすると $df(x)/dx = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\cdot e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

ここで $e^{\Delta x}-1=t$ とおくと
$e^{\Delta x}=t+1$
(1) $\Delta x=\log_e e^{\Delta x}=\log_e(t+1)$
(2) $\Delta x=0$ のとき
$\log_e(t+1)=0$
$\therefore t+1=1$
$t=0$
$\therefore \Delta x\to 0$ なら $t\to 0$
なので

$$= e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_e(t+1)}$$

$$= e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\log_e(t+1)}$$

$$= e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_e(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

ここで $t=\frac{1}{n}$ とすると $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
($n\to\infty$ なら $t\to 0$)　$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ なので

lim と $\log_e$ の順序がかわっていることに注意

$$= e^x\cdot\frac{1}{\log_e e}$$

$$= e^x\cdot\frac{1}{1}$$

$$= e^x$$

[2] 自然対数とって微分すると逆数になる

例: xを
①自然対数とって
②微分する

cf. $\ln = \log e$

$$\frac{d\ln x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$n = \frac{x}{\Delta x}$とすると
$(\Delta x = \frac{x}{n})$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{x}{n}}$$

$\Delta x \to 0$だと
$n = \frac{x}{\Delta x}$なので
nは∞に接近

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \ln(1+\frac{1}{n})}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} \cdot \ln(1+\frac{1}{n})^n$$

$\ln$と$\lim$の順序がかわっていることに注意

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln \cdot \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln e$$

$$= \frac{1}{x} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{x}$$

$\therefore d\ln k/dt$

$$= d\ln k/dk \cdot dk/dt$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \Delta k$$

$$= \frac{\Delta k}{k}$$