統計学入門 補助資料
～期待値～

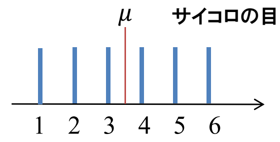
2022年度1学期:　　月曜2限
担当教員:　　　　　石垣　司

確率変数の期待値(確率分布の平均 μ)

- 確率分布の中心(正確には重心)の位置を表す値
- 離散確率分布の平均

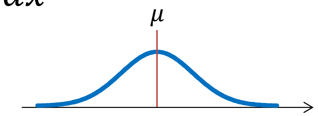
　※高校数学で学習済み

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i)$$



- 連続確率分布の平均

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$



確率変数の関数の期待値

- 確率分布の特徴となる平均や分散などの指標の計算を一般化
- 離散確率分布の期待値

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{m} g(x_i) p(x_i)$$

- 連続確率分布の期待値

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

確率分布の分散 σ^2

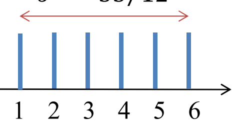
- 確率分布のばらつき(平均からのズレ)を表す指標
  - $g(X) = (X-\mu)^2$ の期待値が分散

#メモ 直観的には $g(X) = |X-\mu|$ の方が理解しやすいが、絶対値よりも2乗の方が数学的な性質がよいため、このように定義される

- 離散確率分布の分散 σ^2

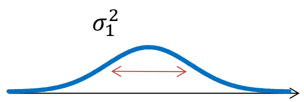
$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

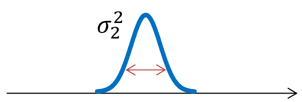
サイコロの目
$\sigma^2 = 35/12$



- 連続確率分布の分散 σ^2

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$





$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

期待値計算の性質

- **定数の期待値**（a, b **は定数**）

$$E[a] = a$$

- **線形性**

$$E[ag_1(X) + bg_2(X)] = aE[g_1(X)] + bE[g_2(X)]$$

- **分散の分解** check!

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

- **確率変数の1次式の分散** check!

$$V[aX + b] = a^2 V[X]$$

演習問題

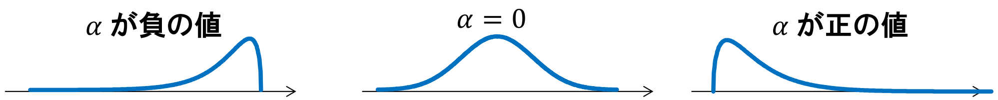
1. **ベルヌーイ分布の平均と分散を求めよ**
   - **確率関数** $P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}$

2. **区間** $[a, b]$ **の一様分布の平均と分散を求めよ**
   - **確率密度関数** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \le x \le b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}$

確率分布の歪度と尖度

- **歪度　確率分布の非対称性の指標**
  - **値が正（負）なら右（左）裾が長い。値がゼロなら左右対称**

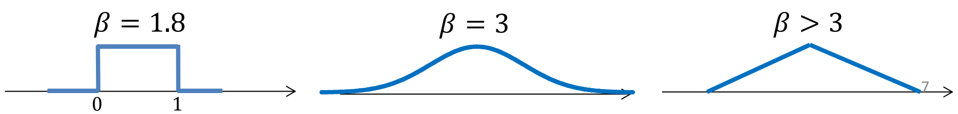
$$\alpha = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$



- **尖度　確率分布の中心の尖り具合の指標**

$$\beta = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

#メモ　正規分布の尖度は3となる。正規分布の尖度を0とする定義($\beta = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3$) もある



補足：確率分布の形を決める量

- **確率変数の** n **乗の期待値** $E[X^n]$ **が確率分布の形を決めている**
  - $\mu = 0$ **のとき，分散** $E[X^2]$**，歪度** $\sigma^{-3}E[X^3]$**，尖度** $\sigma^{-4}E[X^4]$
  - **関数** $g(X) = X^n, (n = 1, \cdots, \infty)$ **の期待値がすべて決まれば，確率分布の形が決まる**

- **確率変数** X **のモーメント母関数（積率母関数）**

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

  - **関数** $g(X) = X^n$ **の** $n = 1, \cdots, \infty$ **の期待値を作り出す関数**
  - **確率変数** X, Y **のモーメント母関数が一致するならば，**X, Y **の確率分布も一致する**
    - **証明は本授業の範囲を超えるため省略**（**複素積分やラプラス変換が必要**）

補足：指数関数のテイラー展開

- 関数 $f(x)$ の $x=a$ における多項式による近似
  - 関数 $f(x)$ が $x=a$ を含む区間で無限回微分可能であり、かつ、$\lim_{\Delta x \to 0} R_n = 0$のとき、

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + R_n$$

    - ※ $a=0$ のときのテイラー展開をマクローリン展開とよぶ
- 指数関数のマクローリン展開とモーメント母関数

$$f(t) = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \cdots$$

演習問題

- 次の確率分布の平均と分散を求めよ

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 6x & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases}$$

  - ※ヒント　分散は, 分散の分解を使うと便利